1 Méthode des différences finies

Résolution de problème avec conditions aux limites du type:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) \;=\; S(x) \;,$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} L\,y(x) & = & S(x) \\ L & = & a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + a_0(x) \end{array} \right. \quad , \quad x \in [x_A ; x_B]$$

Et jeux de conditions aux limites Dirichlet, Neumann où Mixtes:

Dirichlet:	$y(x_A) = Y_A$ et $y(x_B) = Y_B$
Neumann:	$y'(x_A) = Y'_A$ et $y'(x_B) = Y'_B$
Mixtes:	$C_A y(x_A) + y'(x_A) = K_A$ et $C_B y(x_B) + y'(x_B) = K_B$

2 Exemple

Soit à résoudre:

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = x\,e^{-x} \;,\; x \in [x_A = -1; x_B = 1]$$

Dont la solution est:

$$y(x) \;=\; -\frac{x}{4}\,e^{-x} + K_0\,e^{-3x} + K_1\,e^{x}$$

Où les constantes K_0 et K_1 sont déterminées par les conditions aux limites.

Pour l'exemple, on considère $m = 8$ points de collocation équidistants, donc espacés de $h = (x_B - x_A)/(m-1) = 2/7$.

2.1 Utilisation de stencils d'ordre 2 (points équidistants)

On a, sur 3 points espacés d'un pas h:

$$D_2^{(0)} = \mathcal{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_2^{(1)} = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad D_2^{(2)} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sur les $m = 8$ points de collocation, les matrices de dérivations étendues sont:

$$d_2^{(1)} = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} , \; d_2^{(2)} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Construction du système linéaire

On établit la version discrétisée de l'équation différentielle sous la forme:

$$L.y = S$$

Où le vecteur y contient les valeurs nodales $y_i = y(x_i)$ et le vecteur S représente le terme source dont les éléments sont $S_i = S(x_i) = x_i e^{-x_i}$. Compte tenu de l'équation différentielle, les éléments de l'opérateur L sont alors donnés par:

$$L_{ij} = d^{(2)}_{2\,ij} + 2d^{(1)}_{2\,ij} - 3\delta_{ij}$$

Ce qui donne finalement:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & -42 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63 & -154 & 79 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,e^{1} \\ -(5/7)\,e^{5/7} \\ -(3/7)\,e^{3/7} \\ -(1/7)\,e^{1/7} \\ (1/7)\,e^{-1/7} \\ (3/7)\,e^{-3/7} \\ (5/7)\,e^{-5/7} \\ e^{-1} \end{bmatrix}$$

2.3 Conditions aux limites

La prise en compte de celles-ci va se substituer à la simple expression de la discrétisation relative aux frontières (points de collocation x_0 et x_7) donc aux première et dernière lignes du système matriciel.

2.3.1 Dirichlet

Les valeurs aux limites $y(x_A) = Y_A$ et $y(x_B) = Y_B$ sont connues. Les élément $y_0 = Y_A$ et $y_7 = Y_B$ ne sont donc pas des inconnues et on peut écrire le système linéaire réduit:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5/7)\,e^{5/7} \quad -(35/4)Y_A \\ -(3/7)\,e^{3/7} \\ -(1/7)\,e^{1/7} \\ (1/7)\,e^{-1/7} \\ (3/7)\,e^{-3/7} \\ (5/7)\,e^{-5/7} \quad -(63/4)Y_B \end{bmatrix}$$

2.3.2 Neumann

Seules les valeurs des dérivées aux frontières $y'(x_A) = Y'_A$ et $y'(x_B) = Y'_B$ sont données. D'après $D_2^{(1)}$, appliqué à $(y_0, y_1, y_2)^T$ et, appliqué à $(y_5, y_6, y_7)^T$

$$\begin{aligned} \frac{-3}{2h}y_0 + \frac{4}{2h}y_1 - \frac{1}{2h}y_2 &= y'_0 = Y'_A \\ \frac{1}{2h}y_5 - \frac{4}{2h}y_6 + \frac{3}{2h}y_7 &= y'_7 = Y'_B \end{aligned}$$

Et le système linéaire s'écrit alors:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -21 & 28 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -28 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_A \\ -(5/7)\,e^{5/7} \\ -(3/7)\,e^{3/7} \\ -(1/7)\,e^{1/7} \\ (1/7)\,e^{-1/7} \\ (3/7)\,e^{-3/7} \\ (5/7)\,e^{-5/7} \\ Y'_B \end{bmatrix}$$

2.3.3 Mixte

On dispose seulement de relations entre valeurs et dérivées nodale aux frontières: $C_A y(x_A) + y'(x_A) = K_A$ et $C_B y(x_B) + y'(x_B) = K_B$ (où C_A, K_A, C_B et K_B sont des constantes connues). A l'aide de $D_2^{(1)}$, on peut exprimer les valeurs de y'_0 et y'_7 en fonction des valeurs nodales voisines, ce qui mène à:

$$\begin{aligned} \left[C_A - \frac{3}{2h}\right] y_0 + \frac{4}{2h} y_1 - \frac{1}{2h} y_2 &= K_A \\ \frac{1}{2h} y_5 - \frac{4}{2h} y_6 + \left[C_B + \frac{3}{2h}\right] y_7 &= K_B \end{aligned}$$

Et le système linéaire s'écrit alors:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4C_A - 21 & 28 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -110 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -28 & 4C_B + 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_A \\ -(5/7)\, e^{5/7} \\ -(3/7)\, e^{3/7} \\ -(1/7)\, e^{1/7} \\ (1/7)\, e^{-1/7} \\ (3/7)\, e^{-3/7} \\ (5/7)\, e^{-5/7} \\ K_B \end{bmatrix}$$

2.4 Utilisation de stencils d'ordre 4 (points équidistants)

Sur 5 points, espacés de h, on a:

$$D_4^{(1)} = \frac{1}{12h}\begin{bmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{bmatrix} \qquad D_4^{(2)} = \frac{1}{12h^2}\begin{bmatrix} 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \\ 11 & -20 & 6 & 4 & -1 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ -1 & 4 & 6 & -20 & 11 \\ 11 & -56 & 114 & -104 & 35 \end{bmatrix}$$

Sur les $m = 8$ points de collocation, les matrices de dérivation étendues sont:

$$d_4^{(1)} = \frac{1}{12h}\begin{bmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{bmatrix}$$

$$d_4^{(2)} = \frac{1}{12h^2}\begin{bmatrix} 35 & -104 & 114 & -56 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -20 & 6 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 6 & -20 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -56 & 114 & -104 & 35 \end{bmatrix}$$

2.5 Construction du système linéaire

La version discrétisée de l'équation différentielle $L.y = S$, liant valeurs nodales y et terme source S via l'opérateur L se construit de même qu'auparavant. Les éléments de L sont à nouveau:

$$L_{ij} = d_{4\,ij}^{(2)} + 2d_{4\,ij}^{(1)} - 3\delta_{ij}$$

Ce qui donne le système:

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix} 871 & -3752 & 4578 & -2296 & 455 & 0 & 0 & 0 \\ 455 & -1404 & 798 & 28 & -21 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & -77 & 364 & -210 & -844 & 623 \\ 0 & 0 & 0 & 623 & -3192 & 6594 & -6440 & 2271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,e^1 \\ -(5/7)\,e^{5/7} \\ -(3/7)\,e^{3/7} \\ -(1/7)\,e^{1/7} \\ (1/7)\,e^{-1/7} \\ (3/7)\,e^{-3/7} \\ (5/7)\,e^{-5/7} \\ e^{-1} \end{bmatrix}$$

Où, à nouveau, les premières et dernières lignes sont superflues, puisqu'amenées à être remplacées par l'expression des conditions aux limites.

2.6 Conditions aux limites

2.6.1 Dirichlet

Les valeurs aux limites $y(x_A) = Y_A$ et $y(x_B) = Y_B$ imposent $y_0 = Y_A$ et $y_7 = Y_B$. Le système linéaire réduit ne portant que sur les valeurs nodales inconnues est alors:

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -1404 & 798 & 28 & -21 & 0 & 0 \\ 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 \\ -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 \\ 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 \\ 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 \\ 0 & 0 & -77 & 364 & -210 & -844 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5/7)\,e^{5/7} & -(455/48)Y_A \\ -(3/7)\,e^{3/7} & +(21/48)Y_A \\ -(1/7)\,e^{1/7} & \\ (1/7)\,e^{-1/7} & \\ (3/7)\,e^{-3/7} & +(77/48)Y_B \\ (5/7)\,e^{-5/7} & -(623/48)Y_B \end{bmatrix}$$

2.6.2 Neumann

Pour des valeurs des dérivées aux frontières $y'(x_A) = Y'_A$ et $y'(x_B) = Y'_B$ données, et d'après $D_4^{(1)}$, appliqué à $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ et à $(y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)^T$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{-25}{12h}y_0 + \frac{48}{12h}y_1 - \frac{36}{12h}y_2 + \frac{16}{12h}y_3 - \frac{3}{12h}y_4 &= y'_0 = Y'_A \\ \frac{3}{12h}y_3 - \frac{16}{12h}y_4 + \frac{36}{12h}y_5 - \frac{48}{12h}y_6 + \frac{25}{12h}y_7 &= y'_7 = Y'_B \end{aligned}$$

Et le système linéaire devient:

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -350 & 672 & -504 & 224 & -42 & 0 & 0 & 0 \\ 455 & -1404 & 798 & 28 & -21 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & -77 & 364 & -210 & -844 & 623 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & -224 & 504 & -672 & 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_A \\ -(5/7)\,e^{5/7} \\ -(3/7)\,e^{3/7} \\ -(1/7)\,e^{1/7} \\ (1/7)\,e^{-1/7} \\ (3/7)\,e^{-3/7} \\ (5/7)\,e^{-5/7} \\ Y'_B \end{bmatrix}$$

2.6.3 Mixte

A partir des relations entre valeurs et dérivées nodale aux frontières: $C_A y(x_A) + y'(x_A) = K_A$ et $C_B y(x_B) + y'(x_B) = K_B$ et en utilisant $D_4^{(1)}$ pour exprimer les valeurs de y'_0 et y'_7 en fonction des valeurs nodales voisines, on a:

$$\begin{aligned}
\left[C_A - \frac{25}{12h}\right] y_0 + \frac{48}{12h}y_1 - \frac{36}{12h}y_2 + \frac{16}{12h}y_3 - \frac{3}{12h}y_4 &= K_A \\
\frac{3}{12h}y_3 - \frac{16}{12h}y_4 + \frac{36}{12h}y_5 - \frac{48}{12h}y_6 + \left[C_B + \frac{25}{12h}\right] y_7 &= K_B
\end{aligned}$$

Et le système linéaire devient:

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix}
48C_A - 350 & 672 & -504 & 224 & -42 & 0 & 0 & 0 \\
455 & -1404 & 798 & 28 & -21 & 0 & 0 & 0 \\
-21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -21 & 560 & -1614 & 1008 & -77 \\
0 & 0 & 0 & -77 & 364 & -210 & -844 & 623 \\
0 & 0 & 0 & 42 & -224 & 504 & -672 & 48C_B + 350
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} K_A \\ -(5/7)\, e^{5/7} \\ -(3/7)\, e^{3/7} \\ -(1/7)\, e^{1/7} \\ (1/7)\, e^{-1/7} \\ (3/7)\, e^{-3/7} \\ (5/7)\, e^{-5/7} \\ K_B \end{bmatrix}$$