1 Problème différentiel considéré

Résolution de problème avec conditions aux limites du type:

$$\begin{array}{rcl} a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) & = & S(x) \ , \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} L\,y(x) & = & S(x) \\ L & = & a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + a_0(x) \end{array} \right. & , & x \in [x_A; x_B] \end{array}$$

Et jeux de conditions aux limites Dirichlet, Neumann où Mixtes:

$$\begin{array}{ll} \text{Dirichlet:} & y(x_A) = Y_A \ \text{ et } \ y(x_B) = Y_B \\ \text{Neumann:} & y'(x_A) = Y'_A \ \text{ et } \ y'(x_B) = Y'_B \\ \text{Mixtes:} & C_A y(x_A) + Q_A y'(x_A) = K_A \ \text{ et } \ C_B y(x_B) + Q_B y'(x_B) = K_B \end{array}$$

2 Procédure de résolution pseudospectrale (Tchebychev) sur les points de collocation de Gauss-Lobatto

On utilise $N+1$ points de collocation de Gauss-Lobatto, associés aux polynômes de Tchebychev. Ces points de collocation sont, sur l'intervalle $[-1; 1]$, répartis comme suit:

$$x_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, N$$

NB: Pour une équation différentielle sur l'intervalle $[x_A; x_B]$, on se ramène, par changement de variable, à $[-1; 1]$. Dans ce qui suit, on travaille donc sur $[-1; 1]$.

2.1 Discrétisation du problème

Le système liant les valeurs nodales $y_i = f(x_i)$ s'écrit sous la forme matricielle $L.y = S$, où les éléments du vecteur S sont $S_i = S(x_i)$ et les éléments de la matrice L sont:

$$L_{ij} = a_2(x_i)D^{(2)}_{ij} + a_1(x_i)D^{(1)}_{ij} + a_0(x_i)\delta_{ij}$$

où $D^{(2)}$ et $D^{(1)}$ sont les matrices de dérivation seconde et première (dans l'espace physique) associées aux points de collocation.
Rappel: Les éléments de $D^{(1)}$ sont:

$$D^{(1)}_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-(2N^2+1)}{6} & \text{pour } i = j = 0 \\ \dfrac{-x_i}{2(1-x_i^2)} & \text{pour } i = j = 1, \ldots, N-1 \\ \dfrac{2N^2+1}{6} & \text{pour } i = j = N \\ (-1)^{i+j}\dfrac{q_i}{q_j}\dfrac{1}{x_i - x_j} & \text{pour } i \neq j \text{, avec} \\ & q_k = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \text{pour } k = 0 \\ 1 & \text{pour } k = 1, \ldots, N-1 \\ 2 & \text{pour } k = N \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et $D^{(2)} = D^{(1)}.D^{(1)}$.

2.2 Injection des conditions aux limites

2.2.1 Cas général; conditions aux limites mixtes

On dispose de relations entre valeurs et dérivées nodale aux frontières:
$C_A y_0 + Q_A y'_0 = K_A$ et $C_B y_N + Q_B y'_N = K_B$
(où C_A, Q_A, K_A, C_B ,Q_B et K_B sont des constantes connues).

Remarque: Les cas des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann sont, de ce point de vue, simplement des cas particulier:
Dirichlet: $C_A = C_B = 1$, $Q_A = Q_B = 0$, $K_A = Y_A$ et $K_B = Y_B$,
Neumann: $C_A = C_B = 0$, $Q_A = Q_B = 1$, $K_A = Y'_A$ et $K_B = Y'_B$.

En exprimant les quantités y'_0 et y'_N en fonction des y_i (première et dernière lignes de la relation $D^{(1)}.y = y'$), on a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{j=0}^{N} D^{(1)}_{0j} y_j &=& y'_0 \\ \sum_{j=0}^{N} D^{(1)}_{Nj} y_j &=& y'_N \end{array} \right.$$

que l'on injecte dans les relations aux frontières:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_A y_0 + Q_A \sum_{j=0}^{N} D^{(1)}_{0j} y_j &=& K_A \\ C_B y_N + Q_B \sum_{j=0}^{N} D^{(1)}_{Nj} y_j &=& K_B \end{array} \right.$$

Système que l'on réarange sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \left(C_A + Q_A D^{(1)}_{00}\right) y_0 + & Q_A D^{(1)}_{0N}\, y_N &=& K_A - Q_A \sum_{j=1}^{N-1} D^{(1)}_{0j} y_j \\ Q_B D^{(1)}_{N0}\, y_0 + & \left(C_B + Q_B D^{(1)}_{NN}\right) y_N &=& K_B - Q_B \sum_{j=1}^{N-1} D^{(1)}_{Nj} y_j \end{array} \right.$$

Qui peut être vu comme un système de 2 équations à 2 inconnues (y_0 et y_N) qui a pour solutions:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y_0 &=& A_0 + & \sum_{j=1}^{N-1} A_j\, y_j \\ y_N &=& Z_0 + & \sum_{j=1}^{N-1} Z_j\, y_j \end{array} \right.$$

avec, pour $j = 1, \ldots, N-1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} det &=& \left(C_A + Q_A D^{(1)}_{00}\right)\left(C_B + Q_B D^{(1)}_{NN}\right) - Q_A D^{(1)}_{0N}\, Q_B D^{(1)}_{N0} \\ A_0 &=& \frac{1}{det}\left[K_A \left(C_B + Q_B D^{(1)}_{NN}\right) - K_B Q_A\, D^{(1)}_{0N}\right] \\ A_j &=& \frac{1}{det}\left[Q_A D^{(1)}_{0N}\, Q_B D^{(1)}_{Nj} - Q_A \left(C_B + Q_B D^{(1)}_{NN}\right) D^{(1)}_{0j}\right] \\ Z_0 &=& \frac{1}{det}\left[K_B \left(C_A + Q_A D^{(1)}_{00}\right) - K_A Q_B\, D^{(1)}_{N0}\right] \\ Z_j &=& \frac{1}{det}\left[Q_B D^{(1)}_{N0}\, Q_A D^{(1)}_{0j} - Q_B \left(C_A + Q_A D^{(1)}_{00}\right) D^{(1)}_{Nj}\right] \end{array} \right.$$

On peut alors remanier les $N-1$ lignes intérieures de $L.y = S$:

$$\begin{array}{lrcl} & \sum_{j=0}^{N} L_{ij}\, y_j &=& S_i \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, N-1 \\ \Leftrightarrow & L_{i0}\, y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} L_{ij}\, y_j + L_{iN}\, y_N &=& S_i \\ \Leftrightarrow & L_{i0}\, A_0 + L_{i0} \sum_{j=1}^{N-1} A_j\, y_j && \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} L_{ij}\, y_j + L_{iN}\, Z_0 + L_{iN} \sum_{j=1}^{N-1} Z_j\, y_j &=& S_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N-1} \left(L_{ij} + L_{i0}\, A_j + L_{iN}\, Z_j\right) y_j &=& S_i - L_{i0}\, A_0 - L_{iN}\, Z_0 \end{array}$$

On a ainsi construit le système réduit (c.-à-d.: ne portant que sur les $N-1$ valeurs nodales intérieures) $L^{red}.y^{int} = S^{red}$, dont les éléments sont (pour i et $j = 1, \ldots, N-1$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L^{red}_{ij} &=& L_{ij} + L_{i0}\, A_j + L_{iN}\, Z_j \\ S^{red}_i &=& S_i - L_{i0}\, A_0 - L_{iN}\, Z_0 \end{array} \right.$$

Une fois ce système linéaire résolu, la connaissance des valeurs nodales intérieures permet de calculer celles aux frontières en appliquant les relations:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y_0 & = & A_0 + & \sum_{j=1}^{N-1} A_j\, y_j \\ y_N & = & Z_0 + & \sum_{j=1}^{N-1} Z_j\, y_j \end{array} \right.$$

2.3 Récapitulatif des étapes de la procédure

1. Construction des points de collocation x_i de Gauss-Lobatto et matrices de dérivations $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$. Utilisation de ceux-ci pour construire l'opérateur L.
2. Construction, à l'aide des conditions aux limites, des coefficients A_k et Z_k ($k = 0, \ldots, N-1$), puis du système réduit (opérateur réduit L^{red} et terme source réduit S^{red}).
3. Résolution du système linéaire réduit pour déterminer les valeurs nodales intérieures y_i ($i = 1, \ldots, N-1$).
4. Utilisation des valeurs nodales intérieures y_i (et des coefficients A_k et Z_k) pour reconstruire les valeurs aux frontières y_0 et y_N.

Remarque: Dans le cas particulier de conditions aux limites de type Dirichlet, la dernière étape (la reconstruction des valeurs aux frontières) est évidemment inutile. La procédure de construction du système réduit se trouve également simplifiée puisque les coefficients A_i et Z_i, pour $i = 1, \ldots, N-1$, sont nuls et que $A_0 = K_A$ et $Z_0 = K_B$.