1 Basées sur les polynômes de Tchebychev

Le polynôme d'interpolation de degré N, $f_N(x)$ (construit sur $N+1$ points de collocation de l'intervalle $[-1;1]$) d'une fonction $f(x)$, a pour développement sur les polynômes de Tchebychev:

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x)$$

Pour évaluer la dérivée de $f(x)$, il suffit donc de dériver $f_N(x)$.

1.1 Dérivées physiques et spectrales

Aux points de collocation, les valeurs nodale $y_i = f_N(x_i)$ sont liées aux coefficients spectraux c_i du développement par:

$$P.c = y \qquad \Leftrightarrow \qquad c = P^{-1}.y$$

où P est la matrice de passage de l'espace spectral à l'espace physique et sont inverse P^{-1} est la matrice de passage de l'espace physique à l'espace spectral.
D'autre part, les valeurs nodales y_i et dérivées nodales $y_i^{(1)} = f_N'(x_i)$ sont liées par la relation:

$$D_N^{(1)}.y = y^{(1)}$$

où $D_N^{(1)}$ est la matrice de dérivation dans l'espace physique.
En dérivant directement $f_N(x)$, on a:

$$f_N'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{N} c_k T_k'(x)$$

Or, $f_N'(x)$ est un polynôme (de degré $N-1$) qui possède donc un développement sur les polynômes de Tchebychev:

$$f_N'(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(1)} T_k(x)$$

Ce qui implique qu'il y a une relation entre les coefficients spectraux du développement de $f_N(x)$ (les c_k) et ceux (les $c_k^{(1)}$) du développement de $f_N'(x)$. Cette relation peut être écrite sous la forme:

$$D_{S,N}^{(1)}.c = c^{(1)}$$

où $D_{S,N}^{(1)}$ est la matrice de dérivation (première) spectrale.
Puisque $y^{(1)}$ possede un développement sur les polynômes de Tchebychev:

$$P.c^{(1)} = y^{(1)} \qquad \Leftrightarrow \qquad c^{(1)} = P^{-1}.y^{(1)}$$

Les matrices de dérivation dans l'espace physique $D_N^{(1)}$ et dans l'espace spectral $D_{S,N}^{(1)}$ sont donc liées par la relation:

$$D_N^{(1)} = P.D_{S,N}^{(1)}.P^{-1}$$

1.2 Expression de la matrice de dérivation spectrale

Les dérivées (premières) des polynômes de Tchebychev sont:

$$\begin{array}{rcll}
T_0^{(1)}(x) & = & 0 & \\
T_1^{(1)}(x) & = & 1 \; = \; T_0(x) & \\
T_2^{(1)}(x) & = & 4x \; = \; 4T_1(x) & \\
\dfrac{T_{k+1}^{(1)}(x)}{k+1} & = & 2T_k(x) + \dfrac{T_{k-1}^{(1)}(x)}{k-1} & \qquad \text{pour } k \geq 2
\end{array}$$

Ces relations permettent d'établir que les éléments de la matrice de dérivation spectrale $D_{S,N}^{(1)}$ sont:

$$D_{S,N\,ij}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{rl} j & \text{si } i=0 \text{ et } j = 1,3,5,\ldots \\ 2j & \text{si } i = 1,2,\ldots,N-1 \text{ et } j = i+1, i+3, \ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

1.3 Dérivée physique sur les points de Gauss

Pour les points de collocation de Gauss:

$$x_i = -\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2(N+1)}\right) \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, N$$

Les éléments de la matrice de dérivation dans l'espace physique $D_N^{(1)}$ sont:

$$D_{N\,ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{x_i}{2\left(1-x_i^2\right)} & \text{pour } i = j \\ (-1)^{i+j}\dfrac{\sqrt{1-x_j^2}}{\sqrt{1-x_i^2}}\dfrac{1}{x_i - x_j} & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

1.4 Dérivée physique sur les points de Gauss-Radau

Pour les points de collocation de Gauss-Radau:

$$x_i = \cos\left(\frac{2\pi(N-i)}{2N+1}\right) \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, N$$

Les éléments de la matrice de dérivation dans l'espace physique $D_N^{(1)}$ sont:

$$D_{N\,ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\left(1-x_i^2\right)} & \text{pour } i = j = 0, \ldots, N-1 \\ \dfrac{N(N+1)}{3} & \text{pour } i = j = N \\ (-1)^{i+j}\dfrac{p_i}{p_j}\dfrac{\sqrt{1+x_j}}{\sqrt{1+x_i}}\dfrac{1}{x_i - x_j} & \text{pour } i \neq j, \text{ avec} \\ & p_k = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \ldots, N-1 \\ 2 & \text{pour } k = N \end{cases} \end{cases}$$

1.5 Dérivée physique sur les points de Gauss-Lobatto

Pour les points de collocation de Gauss-Lobatto:

$$x_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, N$$

Les éléments de la matrice de dérivation dans l'espace physique $D_N^{(1)}$ sont:

$$D_{N\,ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{-(2N^2+1)}{6} & \text{pour } i = j = 0 \\ \dfrac{-x_i}{2(1-x_i^2)} & \text{pour } i = j = 1, \ldots, N-1 \\ \dfrac{2N^2+1}{6} & \text{pour } i = j = N \\ (-1)^{i+j}\dfrac{q_i}{q_j}\dfrac{1}{x_i - x_j} & \text{pour } i \neq j, \text{ avec} \\ & q_k = \begin{cases} 2 & \text{pour } k = 0 \\ 1 & \text{pour } k = 1, \ldots, N-1 \\ 2 & \text{pour } k = N \end{cases} \end{cases}$$