

# **Convection thermique d'un liquide binaire confiné dans un cylindre vertical**

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud

**Ehouarn Millour**

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur  
LIMSI-CNRS - BP 133, F-91403 ORSAY Cedex (France)

Septembre 2001

**THESE**

présentée pour obtenir le titre de

**Docteur ès Sciences**  
**de l'Université Paris-Sud**

Spécialité : **Dynamique des Fluides et des Transferts**

par

**Ehouarn Millour**

**Convection thermique d'un liquide binaire  
confiné dans un cylindre vertical**

Soutenue le 17 septembre 2001

devant la commission d'examen composée de :

E. Knobloch	Prof. University of Leeds	Rapporteur
G. Labrosse	Prof. Université Paris-Sud	Directeur
M. Lücke	Prof. Universität Saarbrücken	Rapporteur
P. Manneville	D.R. CNRS Ecole Polytechnique	Examineur
J.K. Platten	Prof. Université de Mons-Hainaut	Examineur
E. Tric	MdC. Université de Nice Sophia Antipolis	Directeur

# Table des matières

Introduction générale	5
<b>I Convection thermique d'un fluide chauffé par le bas</b>	<b>7</b>
<b>1 Convection thermique d'un fluide pur</b>	<b>9</b>
1.1 La configuration dite de Rayleigh-Bénard . . . . .	9
1.2 La convection thermique en géométrie cylindrique . . . . .	11
1.2.1 Déstabilisation de l'état conductif . . . . .	11
1.2.2 Les régimes convectifs . . . . .	13
<b>2 Convection thermique d'un mélange de deux constituants</b>	<b>15</b>
2.1 Système thermosolutal . . . . .	15
2.2 Système binaire, effets Soret et Dufour . . . . .	16
2.3 Paramètres de mélanges réels . . . . .	17
2.4 Déstabilisation de l'état conductif . . . . .	19
2.4.1 Système thermosolutal avec conditions aux limites "idéales" . . . . .	19
2.4.2 Le point de codimension 2 . . . . .	21
2.4.3 Liquide binaire avec conditions aux limites réalistes . . . . .	22
2.4.4 Système binaire en géométrie cylindrique . . . . .	26
2.5 Les régimes convectifs . . . . .	27
2.5.1 les (multiples) régimes instationnaires . . . . .	27
2.5.2 les états stationnaires . . . . .	31
<b>II Modélisation de la convection thermique d'un liquide binaire</b>	<b>33</b>
<b>3 Equations d'évolution du système</b>	<b>35</b>
3.1 Considérations générales . . . . .	35
3.1.1 Conservation de la masse et incompressibilité . . . . .	35
3.1.2 Conservation de la quantité de mouvement et hypothèses d'Oberbeck-Boussinesq	36
3.2 Conservation de la masse de chaque constituant . . . . .	36
3.3 Conservation de l'énergie . . . . .	37
3.4 Sources et flux d'entropie . . . . .	37
3.4.1 Equation bilan de l'entropie et équation de Gibbs . . . . .	38
3.4.2 Equation d'évolution de l'entropie . . . . .	38
3.4.3 Expression de la conservation de l'énergie . . . . .	39

3.4.4	Couplage entre flux thermique et massiques et relations d'Onsager . . . . .	39
3.4.5	Détermination des coefficients phénoménologiques . . . . .	40
3.4.6	Equations d'évolution de la température et de la concentration pour un mélange binaire . . . . .	42
3.5	Effets Soret et Dufour . . . . .	42
3.6	Adimensionnement du système . . . . .	43
3.6.1	L'état conductif . . . . .	43
3.6.2	Ecart à l'état conductif . . . . .	44
3.6.3	Echelles et paramètres . . . . .	44
3.7	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	45
3.7.1	Géométrie adoptée . . . . .	45
3.7.2	Choix des conditions aux limites . . . . .	46
3.7.3	Symétries du système . . . . .	48
<b>4</b>	<b>L'outil numérique</b>	<b>50</b>
4.1	Représentation spatiale . . . . .	50
4.2	Intégration temporelle . . . . .	51
4.3	Découplage vitesse-pression par projection-diffusion . . . . .	51
4.4	Convergence des résultats . . . . .	52
4.4.1	Critère de stationnarité . . . . .	52
4.4.2	Cas des écoulements instationnaires . . . . .	53
4.4.3	Choix des maillages et pas de temps utilisés . . . . .	53
4.5	Post-traitement des résultats . . . . .	55
4.5.1	Portraits de phases . . . . .	55
4.5.2	Eléments de théorie sur les bifurcations locales . . . . .	56
4.5.3	Comportements dynamiques au voisinage des bifurcations . . . . .	58
4.5.4	Bifurcations homocline et hétérocline . . . . .	59
<b>III</b>	<b>Résultats</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>Etude de la configuration <math>\Gamma = 2</math></b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.1.1	Obtention des états stables du système . . . . .	63
5.1.2	Illustration d'un écoulement convectif . . . . .	63
5.2	Analyse des états du système . . . . .	66
5.2.1	Les branches de solutions et leurs valeurs seuils . . . . .	66
5.2.2	Analyse détaillée des écoulements oscillants . . . . .	67
5.3	Synthèse des caractéristiques et propriétés du système . . . . .	69
	The first nonlinear convective states and bifurcations of a confined binary liquid . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Influence du confinement sur les bifurcations de l'état oscillant</b>	<b>103</b>
6.1	Introduction . . . . .	103
6.2	Les multiples bifurcations des états oscillants . . . . .	104
6.2.1	Les branches de solutions . . . . .	104
6.2.2	Les principales caractéristiques des états périodiques . . . . .	104
6.2.3	Détail des bifurcations du système "libre" . . . . .	105

6.2.4	Détail des bifurcations du système “rigide” . . . . .	107
6.2.5	Influence du confinement sur l’apparition des bifurcations . . . . .	108
	Bifurcation multiplicity of the oscillatory convective states of an enclosed binary liquid . . . . .	109
6.3	Influences des caractéristiques du liquide binaire sur les états du système . . . . .	131
6.3.1	Régimes convectifs pour $Pr = 10$ en configuration “rigide” . . . . .	131
6.3.2	Régimes convectifs en configuration “libre” . . . . .	132
6.3.3	Récapitulatif . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Comportements convectifs à grand nombre de Rayleigh</b>	<b>138</b>
7.1	Introduction . . . . .	138
7.2	Régimes convectif de fluides purs et liquides binaires . . . . .	139
7.2.1	Ecoulements pour $Pr = 1$ en configuration “libre” . . . . .	139
7.2.2	Caractéristiques générales des solutions en configuration “rigide” à $Pr = 1$ . . . . .	140
7.2.3	Etats et transitions pour un fluide pur . . . . .	141
7.2.4	Etats et transitions pour un liquide binaire . . . . .	142
7.2.5	Comparaison entre les états $sta_1$ des deux fluides . . . . .	143
7.2.6	Régimes convectifs pour $Pr = 10$ . . . . .	144
	Axisymmetric convective states of pure and binary liquids enclosed in a vertical cylinder and boundary conditions’ influence thereupon . . . . .	146
7.3	Caractéristiques générales des régimes oscillants . . . . .	181
7.3.1	Branches $osc_1$ . . . . .	181
7.3.2	Branches $osc_2$ . . . . .	182
7.4	Synthèse . . . . .	182
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>184</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>186</b>

# Introduction générale

Un très grand nombre de systèmes fluides, naturels ou industriels, sont le siège de gradients thermiques et compositionnels. Bien que les premières études relatives à la mise en mouvement (convection) d'une couche de fluide chauffée par le bas datent du début du siècle précédent, ce système dynamique reste, à ce jour, l'un des plus étudiés en mécanique des fluides. Il s'agit en effet d'un cas où non seulement les mécanismes physiques sous-jacents sont parfaitement compris et les conditions expérimentales relativement bien contrôlées, mais surtout d'un exemple de système hors équilibre capable d'engendrer une grande variété de phénomènes.

Ce n'est que plus récemment, il y a une trentaine d'années environ, que le cas de mélanges soumis aux mêmes conditions fut abordé. Il s'avéra alors que la présence de plusieurs composés rendait la dynamique, donc le nombre d'états possibles, encore plus riche et complexe. Un grand nombre de travaux, analytiques, numériques et expérimentaux ont depuis été réalisés sur le sujet, mais très majoritairement dans le cadre de systèmes infinis ou de très grande extension spatiale. Les systèmes réels étant cependant confinés, la question de l'influence de cette contrainte sur les régimes convectifs du fluide reste à élucider. C'est dans ce cadre que se situe le présent travail.

Le choix de s'intéresser à un confinement de type cylindrique est lié à deux motivations à priori très différentes : la convection planétaire et la croissance cristalline. Dans le cas de la géophysique, on sait en effet qu'il existe des mouvements de convection dans la partie externe (liquide) du noyau terrestre. Ceux-ci, couplés aux effets de rotation, pourraient prendre part à la création et au maintien du champ magnétique terrestre, phénomène (dynamique) encore mal compris. On sait de plus qu'entre deux sphères en rotation rapide (l'une pouvant représenter le noyau solide et l'autre le manteau terrestre), l'écoulement se partitionne entre parties équatoriales et polaires ; ces dernières étant en première approximation de type cylindrique. Pour ce qui est de la croissance cristalline, l'enjeu est cette fois de type industriel. Il existe une réelle nécessité de pouvoir fabriquer des monocristaux comportant un degré d'impureté très bien contrôlé (par exemple lors de l'élaboration de semi-conducteurs). Comme certaines de ces techniques sont basées sur le refroidissement de mélanges fondus maintenus par capillarité entre deux barreaux (cylindriques) verticaux, la connaissance des mouvements convectifs se développant dans la zone fondue serait un atout majeur pour exercer un meilleur contrôle sur la qualité des cristaux obtenus.

Précisons dès à présent qu'il ne s'agit pas ici de s'orienter vers une modélisation représentative des écoulements (à priori tridimensionnels) des systèmes présentés ci-dessus. Cette étude se place plutôt dans la continuité de celles (bidimensionnelles) relatives aux comportements convectifs de liquides binaires en milieu de grande extension : on s'intéresse en particulier aux conséquences (dont on verra qu'elles sont fort nombreuses et variées) induites par la présence d'une faible extension latérale sur les régimes convectifs du système.

Ce travail est présenté en trois parties : la première situe le contexte dans lequel se place cette étude. Elle est donc consacrée à une présentation des travaux existant sur le sujet. Viennent ensuite une description des équations régissant le système ainsi qu'une présentation de l'outil numérique employé pour les résoudre. La troisième partie présente et discute les résultats obtenus.

## Première partie

# Convection thermique d'un fluide chauffé par le bas

Cette première partie se réfère au contexte général dans lequel s'intègrent les travaux présentés par la suite.

Dans un premier temps est évoqué le cas de la convection thermique d'un fluide pur. L'accent est mis sur les résultats relatifs à la configuration géométrique qui nous intéresse : celle d'un confinement cylindrique. Une fois les particularités de la convection dans une telle géométrie évoqués, les spécificités induites lorsque le fluide n'est plus un corps pur mais un mélange de deux constituants est abordé dans le second chapitre. Les différents paramètres régissant le comportement du système sont alors présentés, suivis de quelques résultats issus de travaux récents permettant de décrire d'une part les nombreux comportements convectifs accessibles à un fluide binaire et d'autre part les diverses approches employées pour tenter de les décrire.

# Chapitre 1

## Convection thermique d'un fluide pur

La mise en mouvement (ou convection) d'un fluide causée par la présence d'un gradient thermique est un phénomène naturel commun et néanmoins important que l'on retrouve aussi bien au niveau de la dynamique des océans, de l'atmosphère, voire de l'intérieur des étoiles et planètes, que dans de très nombreux processus industriels.

Dans la majorité des cas, le fluide considéré n'est pas un corps pur et comme il sera montré par la suite, les implications sur le comportement de celui-ci sont importantes. Le présent chapitre est cependant consacré à la convection d'un fluide pur. Les différences induites par le fait de considérer un fluide composé de deux constituants seront montrées plus loin.

Il ne s'agit pas de faire ici une présentation exhaustive de la multitude de résultats relatifs à la convection d'un fluide pur en général, mais simplement d'évoquer quelques points en rapport avec le travail présenté par la suite. Pour cette raison, seules les premières transitions entre régimes convectifs en géométrie cylindrique ainsi que les influences d'un fort confinement sur celles-ci seront présentées.

### 1.1 La configuration dite de Rayleigh-Bénard

Les premières études sur le comportement dynamique d'une couche de fluide chauffée par le bas remonte au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Dans un premier temps Bénard a mis expérimentalement en évidence l'apparition de structures convectives, puis Lord Rayleigh a, quelques années plus tard, développé le formalisme mathématique permettant de prédire et expliquer le processus de déclenchement de ce mouvement. On parle depuis, lorsqu'on s'intéresse à un système fluide chauffé par le bas, de configuration de Rayleigh-Bénard.

L'origine du mouvement convectif est la poussée d'Archimède résultant des inhomogénéités de densité du fluide telles que celles dues à la dilatation thermique. Lorsqu'une couche de fluide au repos est chauffé par le bas, il se crée une stratification verticale de température. Cette dernière induit une stratification de densité telle que du fluide lourd surmonte du fluide plus léger. Cette situation est potentiellement instable dans la mesure où une fluctuation de température au sein d'une particule fluide se verra amplifiée par la poussée d'Archimède résultant sur celle-ci. En effet, toute augmentation (diminution) de température entraînera une diminution (augmentation) de la densité de la particule et donc un mouvement ascendant (descendant) de celle-ci vers des zones

froides (chaudes). Dans ces dernières, les contrastes de densité entre la particule et le milieu seront plus importants et intensifieront donc d'autant le déplacement de celle-ci.

Cette force motrice déstabilisante est cependant sujette à deux phénomènes d'amortissement :

1. La relaxation des gradients de vitesse due à la friction visqueuse.
2. La relaxation des gradients de température due à la diffusion de la chaleur.

On se trouve ainsi dans une situation d'effet à seuil :

- Soit le gradient de densité induit par la différence de température  $\Delta T$  entre le bas et le haut du système est insuffisant et le fluide reste au repos (dans un état dit *conductif* puisqu'il se comporte comme un solide qui transmet la chaleur qui lui est fournie par conduction thermique),
- Soit le gradient de densité est suffisamment important (il dépasse une valeur critique) et il y a naissance d'un mouvement convectif qui permet de transporter la chaleur du bas vers le haut de la couche de fluide plus efficacement que la conduction seule.

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide (tels que sa dilatibilité thermique  $\alpha$ , sa diffusivité thermique  $\kappa$  et sa viscosité cinématique  $\nu$ ) puissent être considérées comme constantes et que la densité puisse s'exprimer comme une fonction linéaire de la température, on introduit généralement un paramètre, le nombre de Rayleigh  $Ra$ , qui dépend des caractéristiques du fluide, de la hauteur de la couche de fluide  $h$  et est proportionnel à  $\Delta T$  :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \kappa}$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

On montre alors que la transition entre l'état *conductif* (où le fluide est au repos) et le régime de convection est obtenue lorsque la valeur de  $Ra$  dépasse une valeur critique  $Ra_c$ . Les analyses de stabilité de couches 2D infinies (voir par exemple Chandrasekhar, 1961) donnent, suivant le choix des conditions aux limites pour la vitesse sur les parois horizontales, les seuils suivants :

Conditions aux limites	$Ra_c(k_c)$	$k_c$
Rigide-rigide	1707.76	3.117
Rigide-libre	1100.65	2.681
Libre-libre	$\frac{27}{4}\pi^4 \simeq 657.51$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \simeq 2.221$

où  $k_c$  est le nombre d'onde de la perturbation déstabilisant l'état *conductif* (c'est à dire le nombre d'onde  $k$  minimisant  $Ra_c(k)$ ), ainsi que celui des paires de rouleaux contra-rotatifs qui se forment alors.

Ces résultats illustrent le caractère non-trivial de l'influence des conditions aux limites sur le comportement d'un système donné. Ce point, et toute son importance, reviendront fréquemment tout au long de ce texte. Dans la mesure où ils seront évoqués de nombreuses fois par la suite, précisons ici que les qualificatifs 'rigide' et 'libre' sont relatifs à deux modèles de conditions cinématiques imposées au fluide à la paroi. Le cas dit 'rigide' rend compte du fait que le fluide est confiné entre des plaques rigides et imperméables auxquelles il adhère. En conséquence, la vitesse du fluide doit s'annuler à ces parois. Dans le cas dit 'libre', on considère cette fois que la frontière est une interface (indéformable) entre le fluide et un milieu extérieur fluide (non miscible avec le précédent). En supposant de plus que les effets de tension superficielle sont négligeables, on obtient

alors une condition dite de glissement sur la frontière : seule la composante normale de la vitesse doit impérativement s’y annuler.

D’après les analyses de stabilité (Chandrasekhar, 1961) la bifurcation qui a lieu à  $Ra_c$  est une fourche super-critique<sup>1</sup> et l’état (non-linéaire) convectif résultant est dû à l’interaction du mode déstabilisant avec lui-même, ce qui implique invariablement les faits suivant :

1. Il y a échange de stabilité entre les états conductif et convectif (le premier devient instable à la naissance du second),
2. Au voisinage de la transition, l’amplitude de la convection est proportionnelle à  $\sqrt{Ra - Ra_c}$  (elle tend donc vers zéro lorsque  $Ra$  tend vers  $Ra_c$  par valeurs décroissantes),
3. Le régime convectif est stationnaire.

Ces trois points restent cependant les seuls à être vrais pour tous les systèmes où un fluide pur est chauffé par le bas. L’évolution des régimes convectifs, à  $Ra$  croissant, s’avère dépendre fortement de la configuration (géométrie du confinement et conditions aux limites) ainsi que d’un deuxième paramètre qualifiant les propriétés du fluide : le nombre de Prandtl  $Pr$ , rapport entre les diffusivités de quantité de mouvement (la viscosité cinématique  $\nu$ ) et de température ( $\kappa$ ).

Au delà de cette première transition, on observe d’une manière très générale que pour des valeurs croissantes de  $Ra$ , l’écoulement devient éventuellement périodique, puis chaotique et finalement turbulent. C’est en fait cette progression vers la complexité et la grande quantité de comportements spatio-temporels (une revue très complète des derniers développements à ce sujet est donné par Bodenschatz et al., 2000) qui en résulte qui ont fait (et continuent de faire) que la configuration de Rayleigh-Bénard est un système hydrodynamique intensivement étudié.

## 1.2 La convection thermique en géométrie cylindrique

Dans cette partie sont donnés les résultats de travaux relatifs à la configuration qui nous intéresse : celle d’un cylindre vertical de petit rapport d’aspect  $\Gamma = R/h$ , où  $R$  est le rayon du cylindre et  $h$  sa hauteur.

### 1.2.1 Déstabilisation de l’état conductif

Une des premières études complète sur le calcul du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  marquant la déstabilisation de l’état conductif est due à Charlson & Sani (1970). En se restreignant au cas axisymétrique et en utilisant une méthode variationnelle, ils ont obtenu la valeur de  $Ra_c$  pour tout  $\Gamma \in [0.5 : 13]$  et plusieurs jeux de conditions aux limites (thermiques et cinématiques) imposées sur la paroi latérale.

Ils obtinrent les résultats généraux suivants :

1. La présence d’un confinement latéral impose une valeur de  $Ra_c$  supérieure à celle d’une couche infinie de fluide. La valeur de ce seuil est d’autre part d’autant plus grande que  $\Gamma$  est petit. Ceci s’explique qualitativement par le fait que l’extension latérale du système impose le nombre d’onde de l’instabilité.

---

<sup>1</sup>Pour une couche infinie, il s’agit d’une fourche de révolution dans la mesure où toute translation latérale arbitraire d’une solution du système est aussi solution de celui-ci.

Paroi latérale adiabatique		Paroi latérale conductrice	
mode le plus instable		mode le plus instable	
$\Gamma \in [0; 0.8]$	1	$\Gamma \in [0; 0.6]$	1
$\Gamma \in [0.8; 1.6]$	0	$\Gamma \in [0.6; 1.5]$	0
$\Gamma \in [1.6; 2.2]$	1	$\Gamma \in [1.5; 2.1]$	1
$\Gamma \in [2.2; 2.6]$	0	$\Gamma \in [2.1; 2.6]$	0
$\Gamma \in [2.6; 3]$	1	$\Gamma \in [2.6; 3]$	1

TAB. 1.1 – Mode (Fourier) azimuthal le plus déstabilisant en fonction du rapport d'aspect du cylindre  $\Gamma$ . Résultats issus de Charlson & Sani (1971); Hardin et al. (1990); Wanschura et al. (1996), avec des conditions aux limites d'adhérence aux parois

$\Gamma$	mode azimuthal	$Ra_c$	source
0.5	0	10752	Touihri et al. (1999)
0.5	1	3696	idem
0.5	2	8939	idem
0.5	1	3750	Verzicco & Camussi (1997)
0.5	1	3610	Neumann (1990)
1	0	2220	idem
0.5	1	3774	Hardin et al. (1990)
1	0	2260	idem
2	1	1832	idem
0.5	0	10887.15	Charlson & Sani (1970)
1	0	2261.86	idem
2	0	1862.27	idem

TAB. 1.2 – Exemples de valeurs seuils pour des modes azimuthaux différents. Cas d'un cylindre avec des conditions aux limites d'adhérence sur les parois. La paroi latérale est adiabatique

2. La valeur de  $Ra_c$  est plus faible si la paroi latérale est adiabatique plutôt que conductrice de chaleur,
3. De même,  $Ra_c$  est moins important dans le cas où un glissement est permis le long de la paroi latérale.

L'étude fut ensuite prolongée (Charlson & Sani, 1971) pour inclure la possibilité d'une déstabilisation de l'état conductif par des modes azimuthaux. Il s'avéra que le mode déstabilisant n'est généralement pas axisymétrique, sauf sur certaines plages de valeurs de  $\Gamma$  (voir tableau 1.1) Ces résultats furent confirmés (et raffinés) par des études ultérieures telles que celles de Hardin et al. (1990) ou Buell & Catton (1983). Ces derniers s'intéressèrent de plus au cas (plus proche de la réalité expérimentale) où la paroi latérale est de conductivité thermique arbitraire.

La configuration particulière (qui sera une de celles utilisées dans les travaux présentés par la suite) où les parois horizontales sont considérées comme rigides (conditions cinématiques d'adhérence) tandis que la paroi latérale est prise comme étant libre (conditions cinématiques de glissement) et adiabatique a aussi été étudié par Wanschura et al. (1996). Ils montrent que dans ce cas, le mode déstabilisant l'état conductif n'est jamais de structure axisymétrique, pour tout  $\Gamma < 2.5$ .

## 1.2.2 Les régimes convectifs

Une fois la valeur seuil  $Ra_c$  de déstabilisation de l'état conductif franchie, on obtient un régime convectif stationnaire. Pour une couche infinie, nous avons vu que cette transition est une fourche super-critique de révolution. Le prise en compte d'une extension latérale donnée induit naturellement la perte de la propriété de translation arbitraire des solutions. Hormis ce fait, le passage d'un état à l'autre en milieu confiné reste semblable à celui obtenu en milieu infini : il s'agit toujours d'une bifurcation fourche super-critique. Le confinement induit de plus, ainsi qu'évoqué dans le paragraphe précédent, une sélection sur les nombres d'ondes des instabilités pouvant se développer. Cette contrainte implique alors naturellement une hausse de la valeur seuil  $Ra_c$  par rapport à celle obtenue pour le système infini. Ces particularités mises à part, la nature de la bifurcation implique à nouveau que l'écoulement convectif résulte principalement de l'interaction du mode déstabilisant avec lui-même et ses caractéristiques (notamment son extension ainsi que ses structures radiales et azimutales) sont proches de celles de ce dernier.

Partant de ce fait, l'utilisation de développements faiblement non-linéaires permet une étude de l'évolution de la convection proche du seuil, analytiquement (voir par exemple Rosenblat, 1982; Manneville & Piquemal, 1983) ou numériquement (Hardin & Sani, 1993, entre autres).

Pour des nombres de Rayleigh plus élevés, la convection est plus fortement non-linéaire et les approches précédentes ne peuvent s'appliquer. Seules des études expérimentales ou numériques peuvent alors permettre une investigation des régimes convectifs. Ces travaux montrent généralement que, tout comme pour les systèmes de grande extension spatiale, un grand nombre de comportements et transitions peuvent avoir lieu. Ces derniers s'avèrent liés pour une part aux caractéristiques du fluide (au travers du nombre de Prandtl  $Pr$  associé) et d'autre part à la géométrie cylindrique et la présence de parois latérales proches. L'étude des régimes convectifs loin de la première transition (le passage de l'état conductif à l'état convectif) se déroule ainsi au cas par cas (un cas étant fixé par une géométrie, un ensemble de conditions aux limites et une valeur de  $Pr$ ).

Les études expérimentales sont réalisées à configuration géométrique et fluide fixés, l'évolution du système étant analysée en fonction du seul paramètre directement contrôlable, le nombre de Rayleigh. En dehors des problèmes liés au fait qu'il faut alors souvent se contenter de mesures globales, par exemple lorsque le fluide utilisé est de l'hélium (Behringer, 1985) ou un métal liquide (Kamotani et al., 1994), à partir desquelles on peut tenter de reconstruire la dynamique de l'écoulement. L'influence des variations de  $Pr$  ou  $\Gamma$  sur celle-ci est difficilement accessible.

Ainsi se profile tout naturellement l'intérêt que peut apporter une approche par simulation numérique de tels systèmes : D'une part ces dernières donnent accès à tous les champs ainsi qu'un contrôle absolu sur les valeurs de paramètres tels que  $\Gamma$  ou  $Pr$ , d'autre part elles permettent certaines études telles que des calculs de stabilité (voir par exemple Touihri et al., 1999) des écoulements. Elles permettent également d'imposer des contraintes simplificatrices (telles que la bidimensionnalité des écoulements), utiles lorsqu'on cherche à dégager les mécanismes physiques sous-jacents, responsables des phénomènes observés expérimentalement.

Il faut cependant rappeler que l'expérimentation numérique (*in silico*, pour reprendre un terme à la mode), bien que permettant de s'affranchir de certaines des contraintes de l'expérimentation *in situ*, possède aussi une cohorte de contraintes qui lui sont propres. Dans un cas comme dans l'autre, il convient bien évidemment de conduire toute expérimentation avec le plus de précision

(raisonnablement) possible. Dans le cas de travaux numériques, cette précision est fortement liée à l'évolution (néanmoins faramineuse) des moyens informatiques, ce qui est de bon augure pour l'avenir de cette science. Il ne faut cependant jamais perdre de vue (ni sous-estimer) l'influence de la précision de l'outil numérique employé sur la validité des résultats obtenus. Mentionnons, pour illustrer ces propos, l'exemple récent suivant :

Neumann (1990), par résolution numérique 3D du cas d'un fluide confiné dans un cylindre de rapport d'aspect  $\Gamma = 1$ , a observé que l'état conductif se déstabilisait bien par un mode axisymétrique (celui prédit par les calculs de stabilité linéaire présenté dans le tableau 1.1) et que l'écoulement axisymétrique résultant était déstabilisé par une perturbation de mode azimutal 2 menant finalement à un partitionnement de la cavité en deux rouleaux. Wagner et al. (1994), par une simulation directe de la même configuration et Wanschura et al. (1996), par une étude (numérique) de stabilité linéaire du système axisymétrique vis-à-vis de perturbations azimutales, montrèrent séparément que le résultat de Neumann (1990) n'était qu'un artefact dû à une résolution (spatiale) insuffisante.

Si, à ce jour, les moyens informatiques de pointe permettent de résoudre convenablement des cas tridimensionnels "simples", elles complètent celles obtenues dans un cadre bidimensionnel qui sont tout aussi fondamentales pour comprendre les mécanismes physiques sous-jacents. A moins d'une étude 3D d'une configuration donnée, on ne peut cependant, à partir de résultats issus d'une analyse 2D, prédire la stabilité des solutions issues de cette dernière vis-à-vis de la troisième direction ; D'autant qu'il est bien connu qu'un fort confinement joue un rôle important d'une part sur les transitions successives entre les régimes convectifs et d'autre part sur la multiplicité des états stables pouvant exister à  $Ra$  donné. Une illustration expérimentale de ces faits est rapporté par Hof et al. (1999) qui, pour un cylindre de rapport d'aspect  $\Gamma = 2$  (pour lequel les résultats de stabilité linéaire de l'état conductif indiquent une déstabilisation par le mode azimutal  $m = 1$ , comme indiqué dans les tableaux 1.1 et 1.2) contenant de l'eau pure ( $Pr \sim 7$ ), montrent qu'ils peuvent obtenir, à  $Ra = 14200$ , jusqu'à quatre types d'écoulements distincts (certains stationnaires, d'autres non), dont un de structure axisymétrique.

# Chapitre 2

## Convection thermique d'un mélange de deux constituants

Dès lors que le fluide considéré n'est pas un corps pur, la relation d'état pour la densité devient une fonction non plus de la température seule, mais aussi de la composition. Le cas le plus usuellement traité, y compris dans ce manuscrit, est celui d'un mélange de deux constituants (solvant-soluté) parfaitement miscibles. On se place de plus dans des conditions (hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq) telles que la densité puisse s'exprimer comme une fonction linéaire en température et en concentration (de l'un des deux constituants, disons le soluté) :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(C - C_0)] \quad , \quad (2.1)$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{C_0} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T_0} \quad (2.2)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les coefficients de dilatabilité thermique et massique du mélange et  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $C_0$  ses densité, température et concentration moyennes.

Remarque : On a fait ici le choix arbitraire de nommer *soluté* le plus dense des deux constituants du mélange, quelque soient les concentrations respectives de ces derniers. Ceci, combiné aux équations données ci-dessus (au choix des signes placés devant les coefficients des équation 2.1 et 2.2) implique par ailleurs que  $\beta$  est positif.

A la prise en compte de la contribution de la concentration à la densité du mélange viennent s'ajouter des couplages entre champs thermique et solutal qui seront discutés plus loin.

Il existe deux approches pour modéliser la convection d'un mélange de deux constituants. Elles sont présentées et comparées dans les paragraphes suivants.

### 2.1 Système thermosolutal

On parle de convection thermosolutale (ou double diffusion) dans les cas où la concentration est traitée de la même manière que la température. On considère alors d'une part que la valeur de chacun des deux est imposée sur les parois horizontales et d'autre part qu'il n'y a aucun couplage direct entre ces deux scalaires (l'évolution de chacun est régie par une équation d'advection-diffusion).

Dans ce cadre, les quatre paramètres pertinents pour décrire le système sont les suivants :

Le nombre de Rayleigh thermique  $Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \kappa}$ ,

Le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ,

Le nombre de Rayleigh solutal  $Ra_S = \frac{\beta g \Delta C h^3}{\nu \kappa}$ ,

Le nombre de Lewis  $Le = \frac{D}{\kappa}$ ,

où  $\Delta C$  est la différence de concentration imposée entre le bas et le haut de la couche et  $D$  la diffusivité massique du soluté.

Deux remarques s'imposent :

1. La situation  $Ra_S < 0$  représente un cas où  $\Delta C < 0$ , c'est à dire tel que la concentration imposée en haut de la couche soit plus faible que celle imposée en bas de celle-ci. On cherche ainsi à établir un gradient de concentration qui,  $\beta$  étant positif, contribue à réduire le gradient de densité induit par la différence de température (pour  $Ra > 0$ ). On est dans une situation où le gradient de concentration est stabilisant. Dans la situation contraire ( $Ra_S > 0$ ), les deux gradients coopèrent et contribuent de concert à déstabiliser le système.
2. Imposer une concentration à la paroi implique l'existence d'un flux entrant ou sortant de soluté dans le système. Les parois sont donc implicitement présumées perméables vis-à-vis du soluté, ce qui n'est généralement pas le cas des travaux expérimentaux.

Cette dernière remarque n'implique pas qu'un système doublement diffusif n'est pas réalisable mais qu'il faut alors prendre des dispositions spécifiques pour imposer la valeur de la concentration à la paroi. En pratique, cela nécessite l'utilisation de réservoirs de soluté et d'interfaces semi-perméables entre ces derniers et le milieu.

De tels dispositifs (Predtechensky et al., 1994) permettent en outre d'étudier la double diffusion dans des mélanges ternaires isothermes (les deux quantités diffusées sont deux des constituants, tandis que pour un système thermosolutal il s'agit de chaleur et de soluté). Un des intérêts de ces systèmes est qu'ils permettent une imposition aisée des conditions aux frontières sur les quantités diffusées (réaliser une paroi adiabatique est expérimentalement délicat, tandis que pour un système ternaire équivalent, il suffit d'une paroi imperméable). Cette approche permet en outre d'utiliser des mélanges pour lesquels les rapports de diffusivités des deux solutés sont compris entre  $10^{-1}$  et 1, soit un ordre de grandeur autre que lorsqu'il s'agit de ceux entre soluté et chaleur (pour lesquels ce rapport, le nombre de Lewis  $Le$ , est généralement de l'ordre de  $10^{-2}$ ).

## 2.2 Système binaire, effets Soret et Dufour

La modélisation de la convection d'un fluide binaire prend en compte les contributions des champs de température et de concentration dans les flux thermique et massique. Il y a présence des deux effets suivants

- L'effet Dufour qui rend compte de la contribution du gradient de concentration au flux de chaleur.
- L'effet Soret qui rend compte de la contribution du gradient thermique au flux massique.

La différence notable, par rapport au modèle thermosolutal, est que l'on considère un système où seule une différence de température extérieure est imposée. La distribution de concentration

dans le mélange ne résulte que de son interaction avec les autres champs physiques, sachant qu'il n'y a aucun flux de matière entrant ou sortant du volume total considéré.

Il est acquis que la contribution de l'effet Dufour, contrairement à celle de l'effet Soret, peut être négligée (Gutkowicz-Krusin et al., 1979a,b; Platten & Legros, 1984; Stein, 1991) lorsque l'on considère un **liquide** binaire. Dans ce cadre, les paramètres pertinents sont les nombres de Rayleigh (thermique)  $Ra$ , de Prandtl  $Pr$ , de Lewis  $Le$  et le paramètre de séparation  $\Psi$ . Les trois premiers sont ceux déjà décrits pour un système thermosolutal et

$$\Psi = \frac{\beta}{\alpha} S_T ,$$

où  $S_T$  est le coefficient de Soret. Selon le signe de ce dernier, on se trouve dans deux cas très différents : lorsqu'il est positif, le soluté (que l'on a pris par convention comme étant le plus dense des deux constituants) migre vers les zones froides (effet déstabilisant), et vers les régions chaudes (effet stabilisant) dans le cas contraire.

On peut être tenté d'établir un lien entre convection thermosolutale et convection thermique d'un liquide binaire en reliant  $\Psi$  et le nombre de Rayleigh solutal  $Ra_S$  par une relation du type  $\Psi = -Ra_S/Ra$ . Cette relation n'est cependant valide **que** si les concentrations en haut et bas de la couche sont **constantes** le long des parois horizontales. Ceci n'est exact que lorsque le système est au repos, dans un état conducteur. Dès qu'il y a convection, on ne peut établir de correspondance entre les deux approches.

## 2.3 Paramètres de mélanges réels

Quatre paramètres sont donc nécessaires pour décrire le système binaire, dont trois ( $Le$ ,  $Pr$  et  $\Psi$ ) dépendent uniquement des caractéristiques physiques (viscosité, dilatabilités, ...) du mélange considéré. Ces dernières sont constantes pour un fluide à concentration (moyenne)  $C_0$  de soluté donnée et à une température (moyenne)  $T_0$  ambiante donnée. Par voie de conséquence, il en est donc de même pour  $Le$ ,  $Pr$  et  $\Psi$ .

Il ne faut donc pas oublier qu'un changement de  $C_0$  et/ou  $T_0$  aura des répercussions sur ces trois valeurs. Des exemples de valeurs "typiques" pour quelques liquides binaires utilisés expérimentalement sont données dans les tableaux 2.1 et 2.2.

Qualitativement, on observe que  $Le$  reste généralement du même ordre de grandeur et que  $Pr$  peut varier d'un facteur 2 à 3 selon les valeurs de  $T_0$  et de  $C_0$ . Ces deux nombres adimensionnels évoluent en outre de façon monotone en fonction de ces dernières.

Les signe et l'ordre de grandeur de  $\Psi$  dépendent par contre bien plus fortement des température et concentration moyennes du mélange. Il faut à ce sujet remarquer que la variation du paramètre de séparation en fonction de  $C_0$  (à  $T_0$  fixé) ne peut être monotone puisque le comportement du mélange rejoint celui d'un corps pur ( $\Psi = 0$ ) lorsque  $C_0 \rightarrow 0\%$  et  $C_0 \rightarrow 100\%$ . Un travail de référence sur les valeurs de  $\Psi$  pour tout  $C_0$  et  $T_0$  du mélange eau-éthanol est donné par Kolodner et al. (1988).

De toute évidence, cette grande sensibilité de la valeur du paramètre de séparation  $\Psi$  aux conditions de température et de concentration moyennes du mélange est une contrainte expérimentale

Eau-isopropanol (de titre massique  $C_0$  en isopropanol)

$C_0$	$T_0$	$Pr$	$Le$	$\Psi$	source
10%	21	13.2	$8 \cdot 10^{-3}$	-0.435	Lhost & Platten (1991)
20%	21	20	$8.7 \cdot 10^{-3}$	-0.13	Lhost & Platten (1988)
42%	?	?	$\sim 10^{-2}$	0.38	Lhost & Platten (1989)

Eau-éthanol (de titre massique  $C_0$  en éthanol)

$C_0$	$T_0$	$Pr$	$Le$	$\Psi$	source
1%	26	6.5	$\sim 10^{-2}$	-0.06	La Porta et al. (1996)
8%	26	10.5	$\sim 10^{-2}$	-0.24	idem
1.1%	?	7.2	$8 \cdot 10^{-3}$	-0.078	Lerman et al. (1996)
25%	?	23.7	$7 \cdot 10^{-3}$	-0.082	idem
22.16%	20	19.69	$5.6 \cdot 10^{-3}$	-0.118	Touiri et al. (1996)
8.01%	20	10.93	$7.8 \cdot 10^{-3}$	-0.349	idem
8.01%	25	9.28	$7.6 \cdot 10^{-3}$	-0.282	idem
8.01%	30	8.11	$7.5 \cdot 10^{-3}$	-0.231	idem
2.8%	27.51	6.862	$8.3 \cdot 10^{-3}$	-0.127	Kolodner (1994)
4.0%	27.68	7.309	$8.3 \cdot 10^{-3}$	-0.167	idem
5.6%	27.81	7.932	$8.2 \cdot 10^{-3}$	-0.210	idem
8.0%	27.82	8.929	$7.9 \cdot 10^{-3}$	-0.253	idem
26%	31	18	$1.2 \cdot 10^{-2}$	-0.058	Fineberg et al. (1988b)
28.5%	31	18	$1.2 \cdot 10^{-2}$	-0.005	idem
40%	25	$\sim 15$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	0.1	Moses & Steinberg (1986)
29.6%	25	$\sim 15$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	0.007	idem

 ${}^4\text{He}$ - ${}^3\text{He}$  (de concentration molaire  $C_0$  en  ${}^3\text{He}$ )

$C_0$	$T_0$	$Pr$	$Le$	$\Psi$	source
3.0%	2.1653	$\sim 1$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	-0.16	Rehberg & Ahlers (1985)
3.0%	2.2217	$\sim 1$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	$\simeq 0$	idem
3.0%	2.3080	$\sim 1$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	0.03	idem
2.22%	2.161	0.7581	$9.087 \cdot 10^{-2}$	-0.338	Thurlow et al. (1996)
2.22%	2.175	0.7072	$7.555 \cdot 10^{-2}$	-0.0978	idem
2.22%	2.2175	0.6117	$5.344 \cdot 10^{-2}$	-0.00426	idem
2.22%	2.233	0.5902	$4.904 \cdot 10^{-2}$	0.00303	idem
2.63%	2.233	0.5827	$4.518 \cdot 10^{-2}$	-0.00111	idem

TAB. 2.1 – Exemples de valeurs des paramètres pour quelques liquides binaires couramment utilisés (les valeurs de températures  $T_0$  sont données en degrés Celsius dans les deux premiers cas et Kelvin pour le système  ${}^4\text{He}$ - ${}^3\text{He}$ ).

majeure, ne serait-ce que lorsqu'il s'agit de produire (et maintenir) un système à  $\Psi$  donné. Il en est de même lorsqu'il s'agit de déterminer cette valeur pour un mélange donné, d'autant que l'effet Soret ne se manifeste qu'en présence de gradients massiques et thermiques qui peuvent induire des circulations de fluide. Etant donné que tous ces paramètres ne sont pas toujours accessibles aux expérimentateurs, toute mesure de la valeur du coefficient de Soret  $S_T$  (donc de  $\Psi$ ) est généralement indirecte et donc entachée d'une incertitude, souvent difficile à déterminer. La méconnaissance de

la présence ou non d'un écoulement au sein du dispositif de mesure a ainsi mené, par le passé, à des mesures complètement éronnées des valeurs de  $S_T$ . Citons à titre d'exemple l'article de Legros et al. (1985) qui rapporte les valeurs de  $S_T$  du mélange méthanol-benzène mesurées indépendamment par six groupes de chercheurs différents. La dispersion, non seulement sur les ordre de grandeurs de  $S_T$  (jusqu'à un facteur 100!) mais aussi sur la valeur de concentration molaire en méthanol pour laquelle  $S_T$  change de signe (entre  $C_0 = 10\%$  et  $70\%$  d'après les six sources mentionnées, jamais selon les mesures des auteurs et pour  $C_0 = 5\%$  pour Moses & Steinberg, 1988) est impressionnante. Les études expérimentales réalisées depuis cette époque sont bien évidemment exemptes de ces types d'erreurs; elles permettent à présent de déterminer avec précision des valeurs de  $S_T$  de nombreux mélanges binaires, ainsi que l'illustre la compilation des données présentée dans le tableau 2.1.

$T_0$	1.76	2.72	3.58	4.78	8.28	9.25
$\Psi$	-0.41	-0.31	-0.24	-0.18	-0.064	-0.043

TAB. 2.2 – Valeurs du paramètre de séparation  $\Psi$  de l'eau salée (de titre massique  $C_0 = 3\%$  en NaCl) en fonction de la température moyenne du mélange  $T_0$  (Caldwell, 1974).

## 2.4 Déstabilisation de l'état conductif

La nature du problème mathématique que pose l'étude de la stabilité d'une couche infinie de liquide binaire est telle qu'il n'y a que le cas d'un système thermosolutal qui puisse être résolu analytiquement, moyennant l'utilisation de conditions aux limites cinématiques "idéalisées" sur les parois où un glissement du fluide est permis.

Il s'avère cependant que la considération de cas plus réalistes donne qualitativement les mêmes résultats (Hurle & Jakeman, 1971, et les études qui suivirent). Afin de bien cerner les types de déstabilisation que peut subir le système et les comportements des valeurs seuils en fonction des paramètres du liquide considéré, les résultats de la première approche seront d'abord donnés, avant de passer à la description de ceux issus des études du cas plus réaliste.

### 2.4.1 Système thermosolutal avec conditions aux limites "idéales"

Dans le cas où un glissement est permis le long des parois horizontales de la couche infinie, l'analyse de stabilité linéaire (détaillée entre autre dans Platten & Legros, 1984) montre qu'il y a deux types de déstabilisation possibles : l'une par une perturbation stationnaire, l'autre par une perturbation oscillatoire. Les termes 'stationnaire' et 'oscillatoire' sont relatifs à l'évolution temporelle de la perturbation, indépendamment de la croissance (où décroissance) de celle-ci<sup>1</sup>. Signalons par ailleurs que les résultats évoqués dans cette section sont valides dans la limite où on ne considère que des perturbations d'extensions spatiales identiques (donc de même longueurs d'onde). L'abandon de cette contrainte et les conséquences qu'impliquent le fait que les nombres d'ondes de chacune des perturbations ne soient pas identiques sont détaillés plus loin.

<sup>1</sup>Les études de stabilité linéaire mènent à considérer l'évolution de perturbations du type  $\exp[(\sigma + i\omega)t]$ . Le signe de  $\sigma$  indique la croissance ( $\sigma > 0$ ) ou décroissance ( $\sigma < 0$ ) de la perturbation. La valeur de  $\omega$  indique s'il s'agit d'une perturbation stationnaire ( $\omega = 0$ ) ou non.

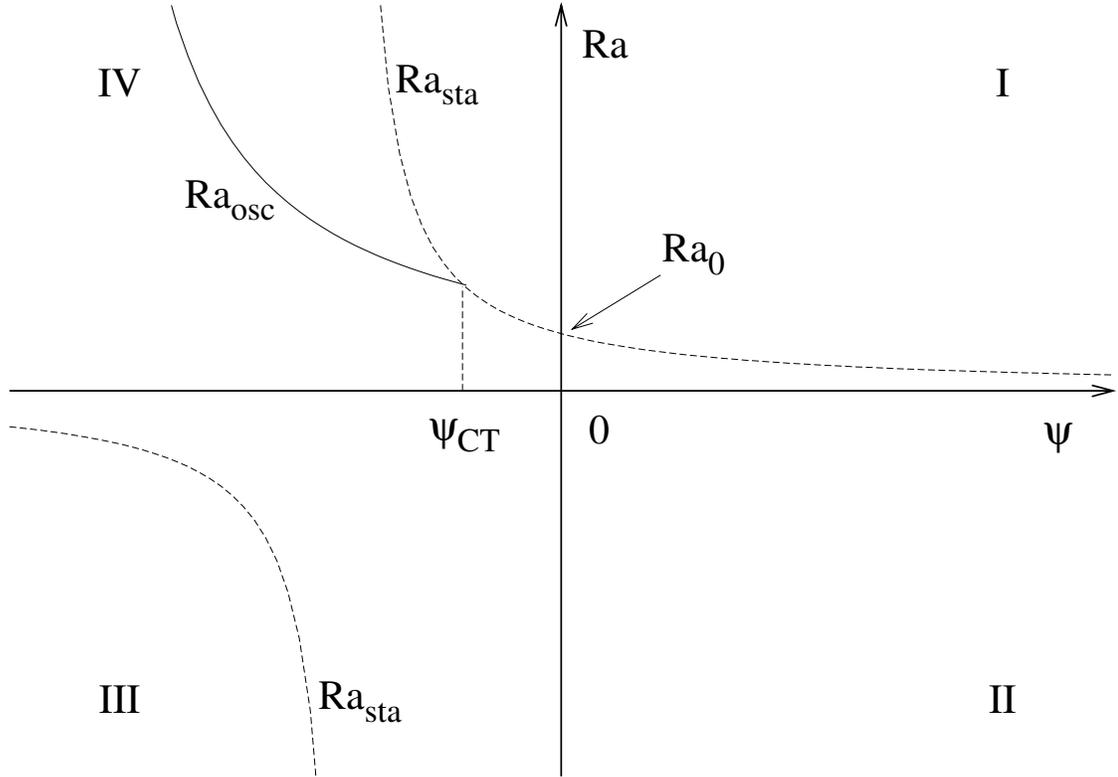


FIG. 2.1 – Diagramme schématique de stabilité de l'état conductif d'un système binaire

Les nombres de Rayleigh critiques associés aux perturbations stationnaire et oscillante sont (figure 2.1) :

$$\frac{Ra_{osc}}{Ra_0} = \frac{(Le + Pr)(Le + 1)}{Pr \left(1 + \psi \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{Pr}}\right)\right)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{Ra_{sta}}{Ra_0} = \frac{1}{1 + \psi \left(1 + \frac{1}{Le}\right)}, \quad (2.4)$$

où  $Ra_0 = 27\pi^4/4$  est la valeur critique obtenue pour une couche de fluide pur dans la même configuration.

On se trouve donc dans un cas de figure plus complexe que celui d'un fluide pur puisque selon les valeurs<sup>2</sup> de  $Pr$ ,  $Le$  et  $\Psi$ , l'état conductif deviendra instable soit par une bifurcation fourche (si  $Ra_{sta} < Ra_{osc}$ ) du type de celle rencontrée dans le cas d'un fluide pur, soit par une bifurcation de Hopf (si  $Ra_{osc} < Ra_{sta}$ ) et la convection prendra naissance de manière oscillante. Il y a de plus la possibilité d'une bifurcation de codimension 2 (les deux modes deviennent simultanément

<sup>2</sup>Dans le cas d'un fluide pur,  $Ra_c$  est seulement fonction de la géométrie du système et des conditions aux limites imposées (le seuil ne dépend pas de  $Pr$ ).

instables) lorsque

$$\Psi = \Psi_{CT} = \frac{-Le^2}{Le(1 + Le) + \frac{1}{1 + \frac{1}{Pr}}} . \quad (2.5)$$

Selon les signes de  $Ra$  et  $\Psi$ , on distingue quatre configurations distinctes (numérotées de I à IV sur la figure 2.1) :

- I.  $Ra > 0$  et  $\Psi > 0$ . Les gradients de concentration et de température sont tous deux déstabilisants. Le gradient de densité résultant est plus fort que celui que l'on obtiendrait pour une même valeur de  $Ra$  si le fluide était un corps pur. La naissance de la convection aura donc naturellement lieu pour une valeur seuil plus faible que  $Ra_0$ .
- II.  $Ra < 0$  et  $\Psi > 0$ . L'état conductif est inconditionnellement stable. Les deux gradients sont en effet stabilisants puisque d'une part le système est chauffé par le haut ( $Ra < 0$ ) et d'autre part le soluté (le plus lourd des deux composés) migre vers la région froide ( $\Psi > 0$ ).
- III.  $Ra < 0$  et  $\Psi < 0$ . Le système est chauffé par le haut et seul le gradient de concentration est déstabilisant. Une instabilité a néanmoins lieu, même lorsque  $-1 < \Psi$ , ce qui représente pourtant une situation hydrostatiquement stable.
- IV.  $Ra > 0$  et  $\Psi < 0$ . Les gradients de température et de concentration sont respectivement déstabilisant et stabilisant. L'apparition de la convection est retardée par rapport à celle d'un fluide pur. C'est le cas où la dynamique des régimes convectifs est la plus riche. Lorsque<sup>3</sup>  $\Psi_{CT} < \Psi$ , la bifurcation est similaire à celle obtenue dans le quadrant I (avec néanmoins  $Ra_{sta} > Ra_0$ ). Pour  $\Psi < \Psi_{CT}$ , le premier mode à devenir instable est oscillatoire, on est dans le cas d'une bifurcation de Hopf. La pulsation de la perturbation (au seuil, c.à.d lorsque  $Ra = Ra_{osc}$ ) est donnée par :

$$\omega_{Hopf} = \frac{3\pi^2}{2} \sqrt{\frac{-\Psi}{1 + \Psi + \frac{1}{Pr}}} \quad (2.6)$$

## 2.4.2 Le point de codimension 2

Pour les résultats qui viennent d'être présentés, les valeurs critiques associées aux modes stationnaire et oscillant sont celles calculées à nombre d'onde  $k$  fixé. Si cependant ce dernier est laissé libre de s'ajuster (pour prendre la valeur minimisant la valeur seuil  $Ra_c(k)$  associée), il est montré (Linz & Lücke, 1987; Cross & Kim, 1988; Knobloch & Moore, 1988) qu'alors les nombres d'onde des instabilités sont différents. Dans ce cas, le point de codimension 2 sera occulté et le passage de la déstabilisation par le mode oscillant (le plus instable pour  $\Psi$  suffisamment négatif) à celle par le mode stationnaire aura lieu pour une valeur de  $\Psi$  inférieure à  $\Psi_{CT}$ . En conséquence :

1. Le passage d'une déstabilisation à l'autre sera accompagné d'un saut en nombre d'onde.
2. Il y aura de même une discontinuité en pulsation (entre celle du mode oscillant, non nulle puisque  $\Psi < \Psi_{CT}$ , et celle, nulle, du mode stationnaire).

---

<sup>3</sup>Le cas  $\Psi_{CT} < \Psi < 0$  est relativement marginal car expérimentalement difficile à réaliser dans la mesure où généralement  $Le \ll 1 \ll Pr$ , ce qui implique une valeur de  $\Psi_{CT} \sim -Le^2$  donc très proche de zéro.

### 2.4.3 Liquide binaire avec conditions aux limites réalistes

La prise en compte de conditions aux limites réalistes (parois imperméables et adhérence du fluide à celles-ci) fait qu'il n'est pas possible de dériver de solution analytique lorsqu'on étudie la stabilité d'une couche infinie de liquide binaire.

Néanmoins, par le biais de modèles associés à certains choix de troncature sur la représentation des champs et conditions aux limites, il reste possible d'établir des relations exprimant la valeur seuil pour laquelle la bifurcation de Hopf de l'état conductif aura lieu.

Rappelons tout d'abord le résultat expérimental suivant :

Pour des mélanges tels que  $Le \ll 1 < Pr$  (du type eau-éthanol), il est observé que la valeur seuil pour laquelle a lieu la bifurcation de Hopf, ainsi que la pulsation de la perturbation vérifient les relations :

$$Ra_{Hopf} = Ra_0 \left[ 1 - \frac{1.05}{1 + \frac{1}{\Psi} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right)} \right] \quad (2.7)$$

$$\omega_{Hopf} = 1.43 \frac{3\pi^2}{2} \sqrt{\frac{-\Psi}{1 + \Psi + \frac{1}{Pr}}} \quad (2.8)$$

où  $Ra_0 = 1707.762$  est la valeur seuil pour une couche infinie de fluide pur.

Ces relations heuristiques proviennent de celles obtenues pour le cas avec conditions aux limites idéales (équations 2.3 et 2.6) ajustées par l'emploi de coefficients expérimentaux (les facteurs 1.05 et 1.43). Comme le rappellent Touriri et al. (1996), l'erreur commise par l'emploi de ces relations est généralement faible (un écart de l'ordre de 3% sur les valeurs de  $Ra_{Hopf}$  et  $\omega_{Hopf}$  par rapport à celles obtenues par une résolution numérique directe du cas particulier étudié) et inférieure aux incertitudes liées aux mesures expérimentales.

Dans le même contexte sur les ordres de grandeur de  $Le$  et  $Pr$ , mais avec un modèle et une périodicité spatiale basée sur un nombre d'onde  $k = \pi$ , Hollinger et al. (1998) obtiennent :

$$\frac{Ra_{Hopf}}{Ra_0} = \frac{1}{1 + \frac{27\pi^2}{256} \Psi \left( \frac{1}{1 + \frac{14}{27Pr}} \right)} \quad (2.9)$$

$$\omega_{Hopf} = \sqrt{\frac{-405.6}{1.041 + \frac{1}{\Psi} \left( \frac{1}{1 + \frac{14}{27Pr}} \right)}} \quad (2.10)$$

où  $Ra_0 = \frac{1}{6} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^6 \simeq 1825.14$  est la valeur seuil pour un fluide pur lorsque  $k = \pi$ .

Lhost et al. (1991), dans un contexte relativement différent puisque cette fois dans la limite  $\left| \left( 1 - \frac{0.758}{1 + 1.944Pr} \right) \Psi \right| \ll 1$ , obtiennent :

$$\frac{Ra_{Hopf}}{Ra_0} = \frac{(1 + 1.479 \frac{Le}{3})(1 + 1.944Pr)(1 + 1.479 \frac{Le}{3} \frac{1}{1.944Pr})}{(1 + 1.944Pr)(1 + \Psi) - 0.758\Psi} \quad (2.11)$$

$$\frac{\omega_{Hopf}}{\sqrt{k_0^2 + \pi^2}} = \sqrt{- \left( 1.479 \frac{Le}{3} \right)^2 - \Psi \frac{0.758(1 + 1.479 \frac{Le}{3})(1.944Pr + 1.479 \frac{Le}{3})}{(1 + 1.944Pr)(1 + \Psi) - 0.758\Psi}}$$

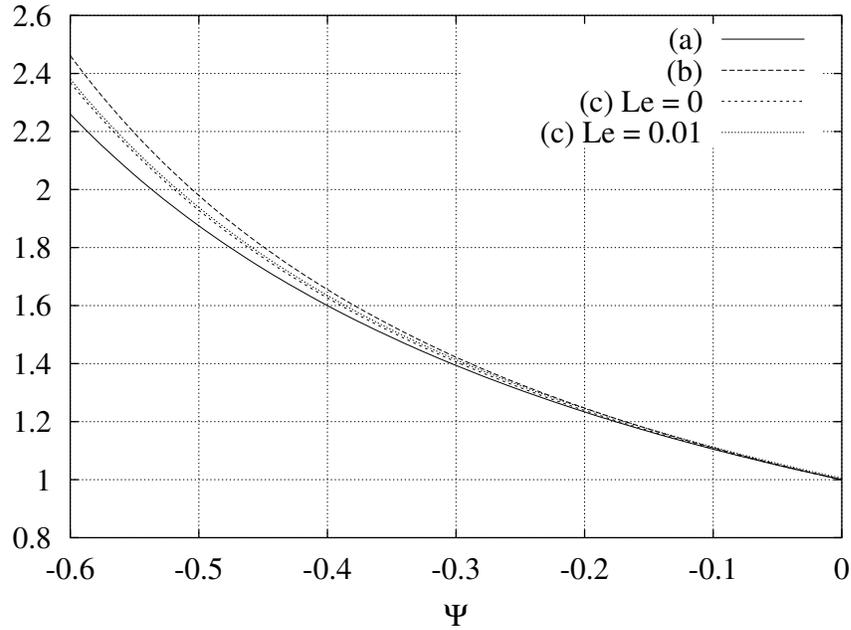
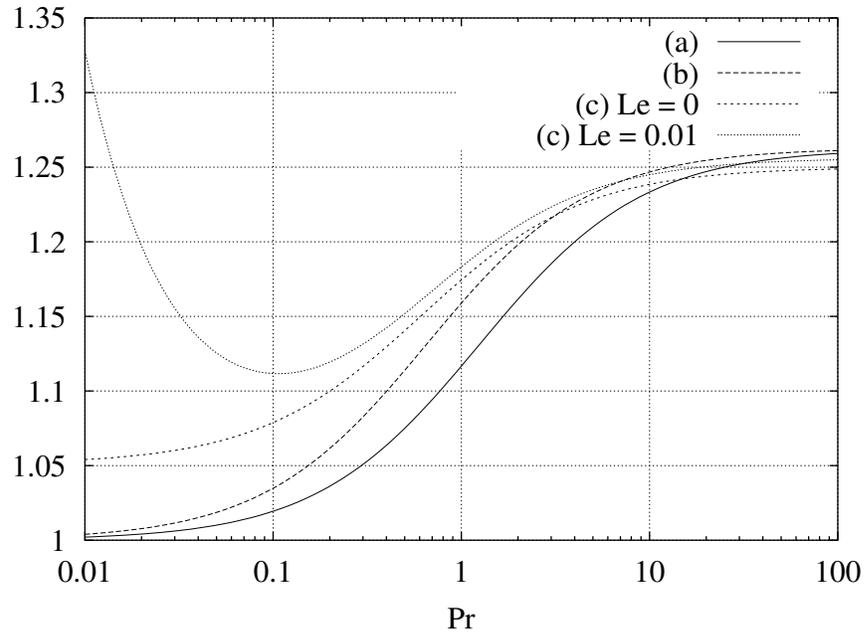


FIG. 2.2 – Evolution de  $Ra_{Hopf}$  (normalisé par rapport à la valeur seuil  $Ra_0$  d'un fluide pur dans la même configuration) en fonction du nombre de Prandtl  $Pr$  (pour  $\Psi = -0.2$ ) et en fonction de  $\Psi$  (pour  $Pr = 10$ ) données par les relations discutées dans le texte : (a) eq. 2.7; (b) eq. 2.9 (Hollinger et al., 1998); (c) eq. 2.11 (Lhost et al., 1991)

avec  $Ra_0 = 1728.38$  et  $k_0 = 3.097$ .

Les comportements de  $Ra_{Hopf}$  et  $\omega_{Hopf}$  prévus par ces trois approches sont donnés en figures 2.2 et 2.3. On observe ainsi les tendances suivantes :

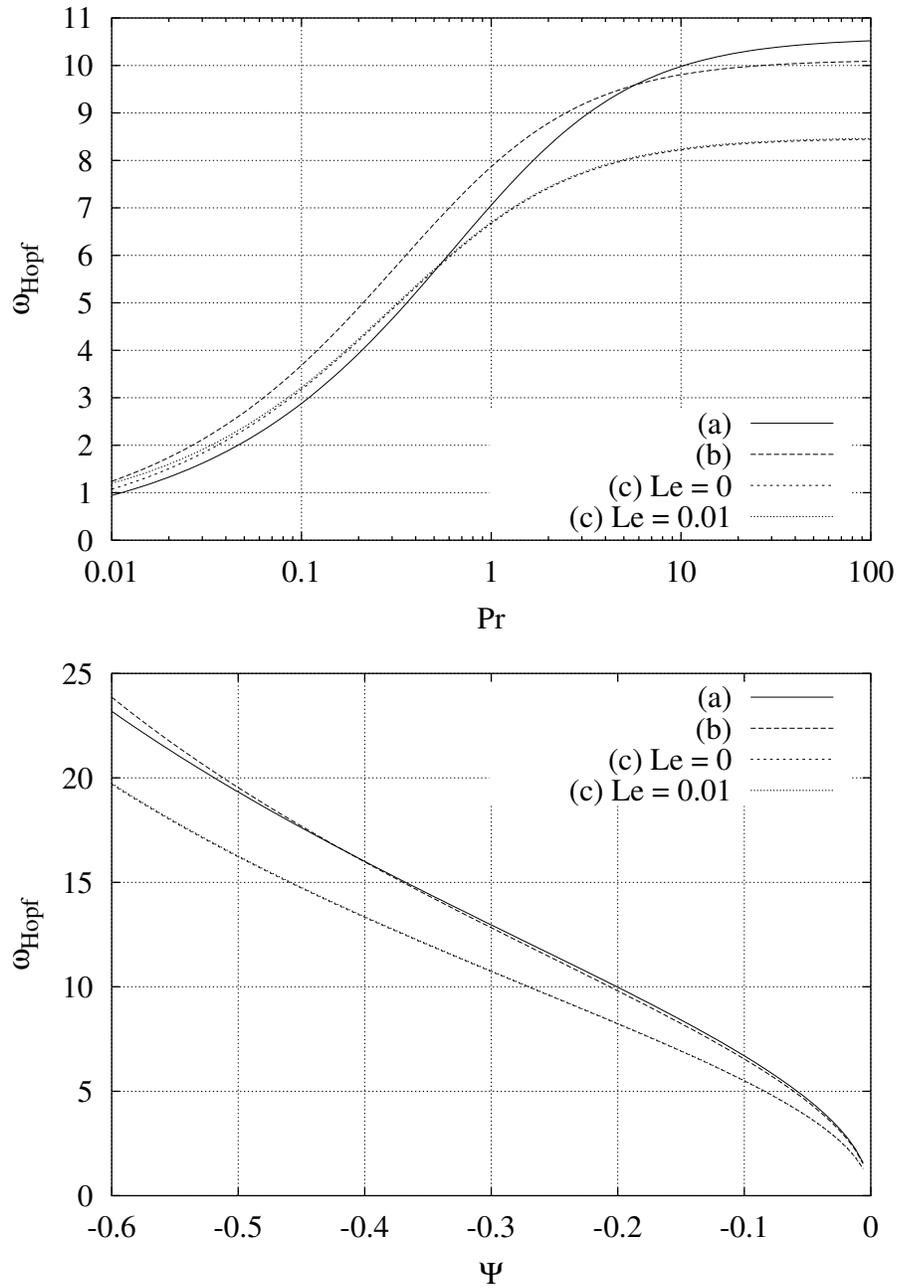


FIG. 2.3 – Evolution de la pulsation  $\omega_{Hopf}$  en fonction du nombre de Prandtl  $Pr$  (pour  $\Psi = -0.2$ ) et de  $\Psi$  (pour  $Pr = 10$ ) pour les seuils données dans la figure 2.2. Les courbes issues de (c) sont confondues pour  $Le = 0$  et  $Le = 10^{-2}$ .

- L'évolution de  $Ra_{Hopf}$  due aux variations de  $\Psi$  est bien plus importante que celle induite par des changements de la valeur de  $Pr$ .
- La valeur de  $Le$  exerce une influence importante sur la valeur du seuil (notamment lorsque  $Pr$  est petit) et bien moindre sur la pulsation  $\omega_{Hopf}$  associée.

Une illustration de l'évolution de  $Ra_{Hopf}$  et  $\omega_{Hopf}$  en fonction de  $\Psi$ , pour des couples de valeurs

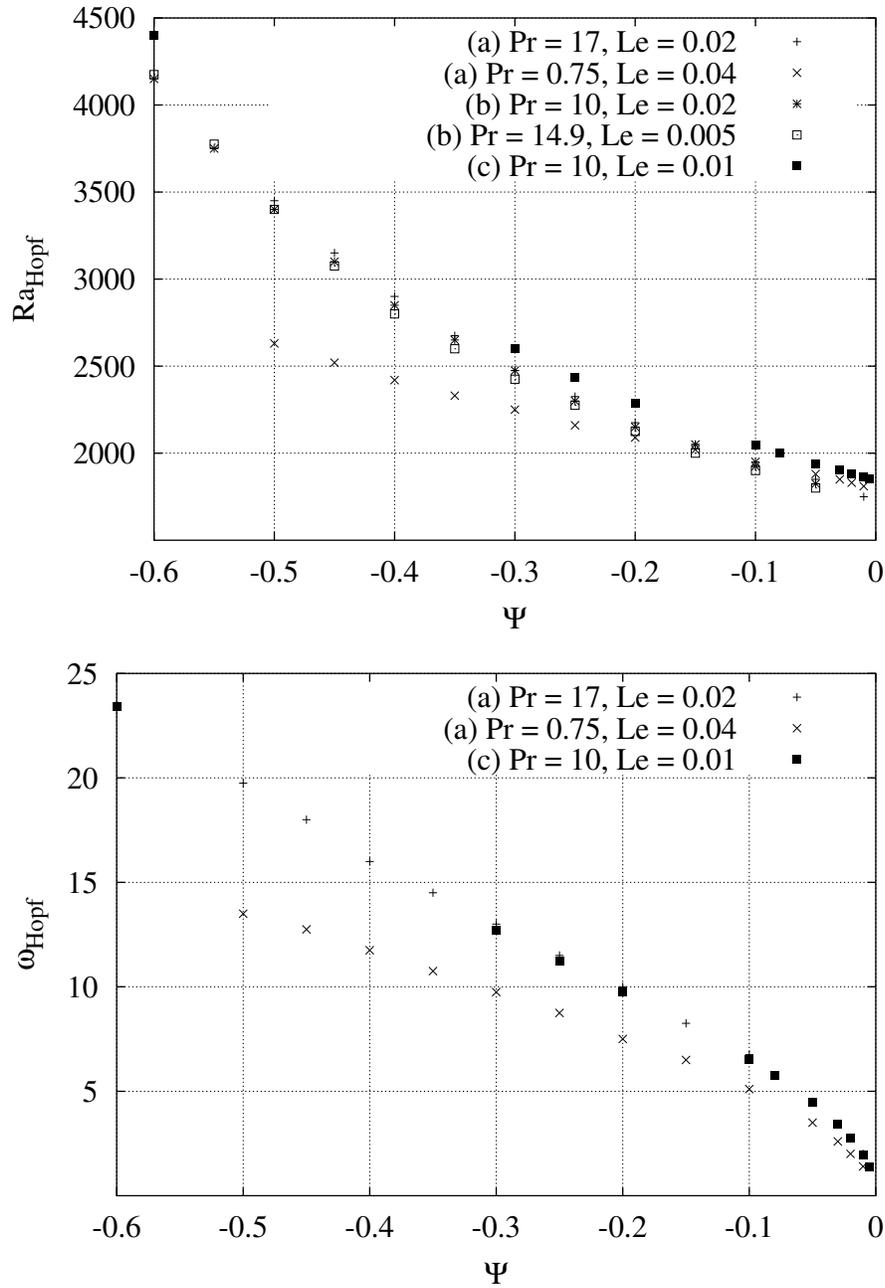


FIG. 2.4 – Exemples de l'évolution de  $Ra_{Hopf}$  et  $\omega_{Hopf}$  en fonction de  $\Psi$  pour des valeurs de  $Pr$  et  $Le$  caractéristiques de mélanges eau-éthanol ( $Pr \sim 10$ ,  $Le \sim 10^{-2}$ ) et  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  ( $Pr \sim 1$ ,  $Le \sim 10^{-1}$ ). Ces valeurs sont issues d'analyses de stabilité linéaire (a) Zelinska & Brand (1987), (b) Knobloch & Moore (1988) et de simulation directe de couches infinies (c) Barten et al. (1995a). Dans ce dernier cas, la période latérale du système est fixée au double de sa hauteur.

de  $Le$  et  $Pr$  caractéristiques des mélanges eau-éthanol et  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  est donnée sur la figure 2.4. Qu'il s'agisse de résultats de stabilité linéaire (avec prise en compte de l'évolution du nombre d'onde de la perturbation), moyennant des approximations (Zelinska & Brand, 1987) aussi bien que exacts

(Knobloch & Moore, 1988), ou de valeurs obtenues par simulation numérique directe d'un système cartésien bidimensionnel (avec une condition de périodicité latérale, tel celui étudié par Barten et al., 1995a), un même comportement qualitatif se dégage : la valeur seuil et la pulsation augmentent au fur et à mesure que  $\Psi$  décroît.

Mentionnons pour terminer l'existence d'études telles que Gutkowitz-Krusin et al. (1979a,b) et Stein (1991) où, toujours dans le contexte d'une couche d'extension horizontale infinie, l'effet Dufour est pris en compte.

#### 2.4.4 Système binaire en géométrie cylindrique

Comme nous venons de la voir, les paramètres  $Pr$ ,  $Le$  et  $\Psi$  liés à la nature du liquide binaire considéré interviennent de manière importante et complexe sur la déstabilisation de l'état conducteur. L'ajout de contraintes supplémentaires dues à un confinement cylindrique (comme pour le cas d'un fluide pur évoqué au chapitre précédent) rend ce point encore plus complexe.

Une des premières analyses systématiques de la stabilité linéaire de l'état conducteur en géométrie cylindrique est due à Crespo & Velarde (1982) (voir aussi les corrections et ajouts ultérieurs: Velarde et al., 1985). Pour  $\Psi > 0$  (relatif aux expériences de Olson & Rosenberger, 1979b; Abernathy & Rosenberger, 1981, réalisées avec des mélanges gazeux de xénon-hélium et xénon-argon) et en incluant l'effet Dufour, ils déterminèrent les valeurs seuils des modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = 1$  pour divers rapports d'aspect  $\Gamma$ . Bien que les valeurs seuils dépendent quantitativement des paramètres relatifs au fluide, ces analyses de stabilité linéaire montrèrent une évolution simple entre les valeurs seuils associées aux modes  $m = 0$  et  $m = 1$  en fonction de  $\Gamma$ . Pour des petits rapports d'aspect (inférieurs à l'unité), le mode azimutal  $m = 1$  est le plus instable des deux et inversement pour les cylindres de grands rapports d'aspect.

Hardin et al. (1990) étendirent et raffinèrent cette étude en prenant notamment en compte des modes de structures azimutales  $m = 3$  et  $4$ . Leurs calculs, réalisés avec et sans effet Dufour (toujours en relation avec les expériences de Olson & Rosenberger, 1979b; Abernathy & Rosenberger, 1981), montrent que la contribution de ce dernier sur les valeurs seuils de l'état conducteur est mineure, comparée à celle de l'effet Soret. Ils montrèrent également que l'ordre d'apparition en fonction de  $\Gamma$  des modes  $0$  et  $1$  n'était pas aussi hiérarchisé que le laissait entendre l'étude de Hardin et al. (1990) mais qu'il pouvait y avoir alternance entre les deux, similairement à ce qui est observé dans le cas d'un fluide pur (tableau 1.1 page 12).

Une autre étude de stabilité de l'état conducteur vis-à-vis de perturbations azimutales en fonction du paramètre de séparation  $\Psi$  (pour  $\Psi \in [-1; 0]$ ) a été réalisée par Mercader et al. (1995). Les valeurs de  $\Gamma$ ,  $Le$  et  $Pr$  utilisées sont relatives à deux séries d'expériences : la première sur deux mélanges  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  (tels que  $Pr = 0.755$ ,  $Le = 6.7 \cdot 10^{-2}$  pour l'un et  $Pr = 0.547$ ,  $Le = 2.5 \cdot 10^{-2}$  pour l'autre) utilisés par Thurlow et al. (1996) dans une cellule cylindrique de petit rapport d'aspect ( $\Gamma = 2.6$ ) ; la seconde sur le système eau-éthanol ( $Pr = 24$ ,  $Le = 8 \cdot 10^{-3}$  étudié par Lerman et al., 1993, 1996) dans une cellule plus étendue ( $\Gamma = 11.6$ ).

Ils obtiennent, pour  $\Gamma = 2.6$  et des conditions aux limites réalistes d'adhérence aux parois et de flux massique sortant nul, les résultats suivants :

1. A une structure azimutale  $m$  donnée correspondent plusieurs modes (de structure radiales et/ou verticales ainsi que de pulsation  $\omega_{Hopf}$  différentes).

2. Pour tout mode, qu'il soit le plus instable ou non, l'influence de la valeur de  $\Psi$  est qualitativement la même que celle obtenue pour les systèmes infinis (voir les figures 2.2 et 2.3) : Lorsque  $\Psi$  décroît vers  $-1$ ,  $Ra_{Hopf}$  et  $\omega_{Hopf}$  augmentent.
3. Pour  $Pr = 0.755$  et  $Le = 6.7 \cdot 10^{-2}$ , le mode le plus instable est axisymétrique ( $m = 0$ ) pour  $\Psi \in [-1; -0.72]$ , et de structure azimutale  $m = 1$  lorsque  $\Psi \in [-0.72; \Psi_{CT} \simeq -2.3 \cdot 10^{-3}]$ .
4. Cette hiérarchie est assez bien respectée lorsque les valeurs de  $Pr$  et  $Le$  sont modifiées (lorsque  $Pr = 0.547$  et  $Le = 2.5 \cdot 10^{-2}$ , le passage du mode  $m = 0$  au mode  $m = 1$  a lieu vers  $\Psi = -0.74$ ). Il y a cependant une chute importante des valeurs critiques  $Ra_{Hopf}$  et pulsations  $\omega_{Hopf}$  associées.

## 2.5 Les régimes convectifs

Les mélanges binaires offrent d'une manière générale une très grande variété de comportements dynamiques, particulièrement dans les cas où les effets des gradients thermiques et solutaux sont opposés ( $\Psi < 0$ ).

En dehors des deux cas particuliers donnés par  $\Psi_{CT} < \Psi < 0$  (où le mode déstabilisant l'état conducteur est stationnaire) et  $\Psi$  très légèrement inférieur à  $\Psi_{CT}$  (où la bifurcation de Hopf peut être super-critique), l'état conducteur perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf sous-critique. Les conséquences de celle-ci sont les suivantes :

1. Dès que la valeur de  $Ra$  dépasse la valeur seuil  $Ra_{Hopf}$ , toute perturbation, aussi faible soit-elle, de l'état conducteur donnera naissance à une oscillation de pulsation  $\omega_{Hopf}$  d'amplitude croissant exponentiellement dans le temps.
2. Après cette phase de croissance, l'amplitude sature à une valeur finie tandis que la fréquence de l'état oscillant décroît vers une valeur finale  $\omega$  (généralement très inférieure à celle de Hopf).
3. Une fois l'état de convection oscillante atteint, on peut suivre son évolution en augmentant ou en diminuant la valeur de  $Ra$ .
4. La branche d'états oscillants stables résultant de la bifurcation sous-critique de Hopf (figure 2.5) existe pour des valeurs de  $Ra < Ra_{Hopf}$ . Il y a donc une plage de valeur de  $Ra$ , comprise entre  $Ra_{SN}$  (point de rebroussement où la branche instable issue de la bifurcation de Hopf acquiert sa stabilité) et  $Ra_{Hopf}$  sur laquelle états oscillant et conducteur sont tous deux stables.
5. Sur la partie stable de la branche oscillante, la pulsation des oscillations est une fonction décroissante de  $Ra$ .
6. La branche oscillante n'existe que jusqu'à une valeur de  $Ra$  donnée. Au delà de cette deuxième bifurcation, le régime convectif devient stationnaire.

### 2.5.1 les (multiples) régimes instationnaires

#### Ondes propagatives et ondes stationnaires

Les études théoriques (voir par exemple Knobloch, 1986; Schöpf & Zimmermann, 1993) montrent qu'en milieu infini, deux types de régimes ondulatoires naissent à la bifurcation de Hopf de l'état conducteur; l'un correspond à un système d'ondes propagatives (droite ou gauche), l'autre à un

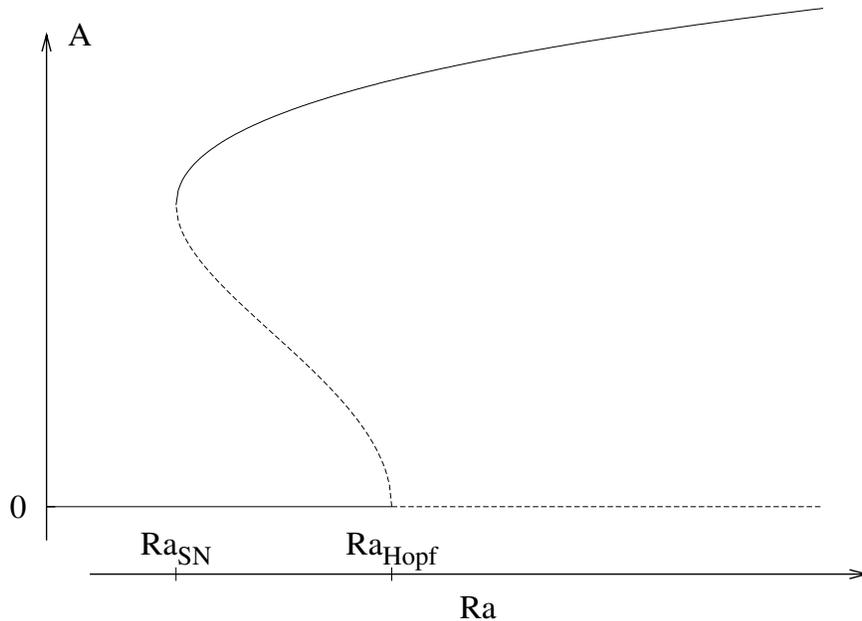


FIG. 2.5 – *diagramme schématisant la bifurcation de Hopf sous-critique de l'état conductif. Les traits continus et pointillés désignent respectivement les états stables et instables.*

système d'ondes stationnaires (qui résulte de la somme d'ondes propagatives droite et gauche de même amplitude). Le comportement lié à ces systèmes d'ondes présente les caractéristiques suivantes :

- Ondes propagatives : Il y a un mouvement (latéral) d'ensemble des rouleaux de convection ; cette propagation est donnée par la vitesse de groupe des ondes. Un observateur se déplaçant de même verra des paires de rouleaux de structure spatiale invariante.
- Ondes stationnaires : Il n'y a pas de mouvement d'ensemble des rouleaux de convection. La dynamique est cette fois liée à l'interaction des deux rouleaux entre eux.

Il faut remarquer que le concept d'ondes propagatives nécessite **par définition** de se placer dans le cas d'un système horizontalement **infini**, qui peut néanmoins être approché expérimentalement par l'utilisation de géométries annulaires (Bensimon et al., 1990). Pourtant, même dans les cas plus "confinés", le comportement convectif observé est celui d'ondes propagatives : Il y a un mouvement d'ensemble des rouleaux découlant d'un processus continu de nucléation et annihilation de ceux-ci aux extrémités de la cavité.

Une des tentatives pour expliquer ce phénomène est donnée par Cross (1986, 1988) : Dans le cas de systèmes de grande extension, on permet aux amplitudes des ondes propagatives droite et gauche d'être modulées sur des grandes échelles (par rapport à celles d'une paire de rouleaux) de temps et de distance, ce qui mène à un système d'équations couplées du type Ginzburg-Landau à coefficients complexes (CGL). Traiter ainsi l'existence de frontières comme une perturbation du cas purement infini permet en effet de retrouver des résultats semblables à ceux observés expérimentalement (par exemple par Fineberg et al., 1988a).

Il faut cependant remarquer que ces développements analytiques (ainsi que leurs éventuels raffinements tels ceux proposés par Riecke, 1995) découlent de résultats d’analyses linéaires. Ils ne sont alors, par ce fait, *a priori* valables que relativement près du seuil de l’état conducteur pour un système supposé faiblement non linéaire. Or, comme le font remarquer Hollinger & Lücke (1998), les régimes convectifs réels sont fortement non linéaires et donc *a fortiori* hors du domaine de validité d’une telle approche. Landsberg & Knobloch (1996a,b) ont montré que le fait de considérer un système de grande extension spatiale et de faire tendre cette extension vers l’infini mène à un système d’équations plus complet et plus complexe que celui de Cross (1986). Ce système contient des termes (d’ordre 1) supplémentaires par rapport au cas CGL qui n’apparaît alors plus que comme un cas particulier.

### Etats convectifs localisés

Lorsque l’extension latérale est grande devant celle des rouleaux, il devient possible d’obtenir des états convectifs autres que les systèmes d’ondes propagatives, localisés dans l’espace. Dans ces cas, seule une partie de la couche fluide convecte, entourée de zones restant à l’état conducteur. Ces états spatialement localisés ont été obtenus aussi bien numériquement, en modélisant un système infini (Barten et al., 1995b) ou clos (Yahata, 1991, entre autres), qu’expérimentalement dans des cavités annulaires (Bensimon et al., 1990) aussi bien que cartésiennes (Lhost & Platten, 1991, parmi beaucoup d’autres). Ces solutions s’avèrent en outre posséder des propriétés très variées, qu’il s’agisse de leurs extension spatiale ou propagation. Il est de plus possible d’aboutir à des systèmes dans lesquels plusieurs régimes convectifs localisés coexistent et interagissent (ce point est particulièrement étudié par Riecke, 1995; Riecke & Rappel, 1995).

### Etats quasi-périodiques et chaotiques

En plus des régimes convectifs monopériodiques présentés ci-dessus, il est possible d’obtenir des cas de convection quasi-périodique (plusieurs fréquences sont présentes dans les spectres temporels), que ce soit dans les systèmes modèles (Knobloch, 1986), lors de la résolution numérique directe des équations (Deane et al., 1987, 1988) ou expérimentalement (Fineberg et al., 1988b; Lhost & Platten, 1988). Il est aussi possible d’obtenir un écoulement chaotique, ce qui est observé aussi bien expérimentalement (par exemple par Steinberg et al., 1987), que numériquement (Knobloch et al., 1986; Deane et al., 1987; Moore et al., 1991, entre autres).

### Influence des caractéristiques du liquide binaire

Hollinger et al. (1998) donnent, dans le cadre de leur modèle, les valeurs seuils du début ( $Ra_{SN}$ ) et de la fin ( $Ra_{osc \rightarrow sta}$ ) du domaine sur lequel la convection est oscillante :

$$Ra_{SN} = \frac{1}{1 + 0.6567 \left( \frac{1}{1 + \frac{14}{27Pr}} \right) \Psi}$$

$$Ra_{osc \rightarrow sta} = \frac{1}{1 + \frac{1008}{625} \left( \frac{1}{1 + \frac{14}{27Pr}} \right) \Psi}$$

Les expressions de ces seuils montrent que, dans le domaine de validité du modèle ( $Le \ll 1 < Pr$ ), toute augmentation de  $Pr$  ou diminution de  $\Psi$  (le paramètre de séparation étant négatif et supérieur

à  $-1$ ) accroît le domaine en  $Ra$  sur lequel la convection est périodique. Par des simulations directes (avec  $Pr = 10$  et  $Le = 10^{-2}$ ), ils observent d'autre part (Hollinger et al., 1998; Lücke et al., 1998) que lorsque  $\Psi$  devient "fortement négatif" (en deçà de  $-0.4$ ), une zone de la partie auparavant instable de la branche oscillante redevient stable, donnant ainsi naissance à une deuxième branche d'états oscillants. Ainsi, selon la valeur de  $\Psi$ , ils obtiennent la coexistence de deux régimes oscillant monopériodiques.

Par une résolution numérique directe des équations d'évolution, en géométrie cartésienne infinie de périodicité latérale  $\lambda = 2$  ( $\lambda$  étant le rapport de l'extension latérale sur la hauteur du domaine considéré), Barten et al. (1995a) obtiennent, en fixant la valeur de  $\Psi$  à  $-0.25$  et en faisant varier les valeurs des nombres de Prandtl  $Pr$  et Lewis  $Le$ , les résultats suivants :

- A  $Pr$  ( $= 10$ ) fixé, une diminution de  $Le$  entraîne une augmentation du domaine sur lequel l'état oscillant existe.
- A  $Le$  ( $= 10^{-2}$ ) fixé, une diminution de  $Pr$  entraîne une diminution du domaine sur lequel l'état oscillant existe.

### Influence du confinement sur les régimes convectifs

Il existe peu de travaux sur l'influence que peut exercer un éventuel confinement latéral sur les régimes convectifs de liquides binaires. Les études, qu'elles soient théoriques, numériques ou expérimentales, concernent dans leur très grande majorité des systèmes de grande extension.

Dans le cas de travaux expérimentaux, il n'existe pas de moyen d'affranchir l'écoulement d'éventuels effets tridimensionnels. D'une manière générale, les dispositifs sont bâtis de façon à offrir une orientation préférentielle aux rouleaux de convection. Ceux-ci ont en effet tendance à s'aligner perpendiculairement à la direction transverse (la profondeur  $p$  du dispositif) dans la mesure où  $p > h$  ( $h$  étant la hauteur de la couche de fluide) et  $p \ll L$  (où  $L$  est la longueur du dispositif). Le système est alors assimilable à un système bidimensionnel. Bien peu d'études se sont cependant intéressées à l'influence réelle que l'extension transverse  $p$  peut avoir sur les états convectifs obtenus. Steinberg et al. (1987) montrent, en utilisant des boîtes de dimensions  $h \times p \times L = 1 \times 4 \times 12$ ,  $1 \times 6 \times 12$  et  $1 \times 9 \times 20$  que lorsque  $p$  est "petit" des états convectifs localisés et des ondes propagatives unidirectionnelles (suivant  $L$ ) apparaissent tandis que pour  $p$  "grand" les ondes se propagent suivant  $p$  et  $L$  et mènent à des régimes chaotiques.

D'autres effets liés à l'extension transverse et son influence sont donnés par la comparaison des résultats issus des travaux suivants :

Winkler & Kolodner (1992) ont utilisé un mélange eau-éthanol ( $Pr = 15$ ,  $Le = 8 \cdot 10^{-3}$  et  $\Psi = -0.24$ ) dans une cellule rectangulaire  $h \times p \times L = 1 \times 3 \times 13.8$ . Ils ont obtenu des résultats en excellent accord avec les prédictions numériques (avec  $Pr = 10$ ,  $Le = 10^{-2}$  et  $\Psi = -0.25$  ou  $-0.08$ ) de Barten et al. (1991) (développés par ailleurs dans Barten et al., 1995b). Liu & De Bruyn (1992), en utilisant une boîte de même longueur mais bien moins profonde  $h \times p \times L = 1 \times 0.3 \times 13.8$  et un mélange eau-éthanol ( $Pr = 21$ ,  $Le = 5 \cdot 10^{-3}$  et  $\Psi = -0.085$ ) ont observé les différences suivantes :

1. La valeur pour laquelle la bifurcation de Hopf de l'état conducteur a lieu est beaucoup plus grande que celle obtenue par les calculs de Barten et al. (1991).
2. Le domaine d'existence de l'état oscillant est de même bien plus important (d'un facteur trois).

3. La valeur de la pulsation de l'état oscillant  $\omega$  est de l'ordre de  $\omega_{Hopf}$  pour  $Ra$  proche de  $Ra_{Hopf}$  tandis que pour les autres études  $\omega_{Hopf} \sim 10\omega$ .
4.  $\omega$  décroît bien lorsque  $Ra$  augmente, mais d'une manière beaucoup plus forte.

## 2.5.2 les états stationnaires

### La transition vers l'état stationnaire

D'après les analyses théoriques et numériques, la branche de solutions oscillantes disparaît via son interaction avec la branche de solutions stationnaires. Selon qu'il s'agisse d'ondes de types propagatives (OP) ou stationnaires (OS), Knobloch (1986); Knobloch & Moore (1990) montrent qu'il s'agit de deux types de bifurcations différentes. Chacune implique que la période  $P$  de l'oscillation tend vers l'infini à l'approche de la valeur seuil  $Ra_{osc \rightarrow sta}$ , en suivant toutefois des lois distinctes :

$$P_{OS} \propto -\ln(Ra_{osc \rightarrow sta}^{OS} - Ra)$$

$$P_{OP} \propto \frac{1}{\sqrt{Ra_{osc \rightarrow sta}^{OP} - Ra}}$$

Cette transition entre régimes oscillant et stationnaire peut être source d'hystérésis (il existe alors des états stationnaires stables pour  $Ra < Ra_{osc \rightarrow sta}$ ). D'une manière générale, dans la plupart des études relatives à des systèmes de grande extension (ou infinis), la transition entre les deux états est continue tandis que pour beaucoup de configurations expérimentales cette hystérésis est observé.

### Structure et domaine d'existence des états stationnaires

De la même manière que la branche d'états oscillants, la branche d'états stationnaires "naît" de l'état conductif via une bifurcation sous-critique (à une valeur de  $Ra = Ra_{sta} > Ra_{Hopf}$ ). Elle s'étend vers les valeurs de  $Ra$  inférieures avant de rebrousser chemin (à  $Ra = Ra_{sta}^{SN}$ ) vers des valeurs croissantes de  $Ra$  (suivant le même schéma que celui donné à la figure 2.5 pour la branche oscillante). A partir de la bifurcation (noeud-col) au rebroussement, la branche stationnaire devient stable. C'est cette même branche qui est rejointe lorsque les états oscillants disparaissent et que l'on peut donc suivre en décroissant<sup>4</sup>  $Ra$ , jusqu'à  $Ra = Ra_{sta}^{SN}$ . En deçà de cette valeur, le système retombe dans l'état conductif.

On observe en effet que dans la grande majorité des cas  $Ra_{sta}^{SN}$  est d'une part plus petit que les valeurs pour lesquelles existe la branche oscillante et d'autre part inférieur à la valeur seuil  $Ra_{Hopf}$  où l'état conductif devient instable.

Beaucoup d'études (voir par exemple Lücke et al., 1998) tendent à montrer que l'état stationnaire d'un fluide binaire est proche de celui d'un fluide pur dans la même situation, modulo l'effet perturbateur de la présence de soluté. la différence induite par la présence du soluté est observée être d'autant plus faible que les valeurs de  $Ra$  sont importantes. L'observation d'une telle équivalence s'explique par le fait que lorsque le forçage thermique se fait plus important, la convection est plus intense, ce qui tend à homogénéiser le mélange.

---

<sup>4</sup>Ce paragraphe concerne bien évidemment les cas où la transition entre états oscillants et stationnaires est hystérique.

En se basant sur l'idée de considérer la convection d'un mélange binaire comme un écart à celle d'un fluide pur, Bensimon et al. (1989) ont élaboré un modèle (restreint au cas d'une couche infinie bidimensionnelle d'un mélange tel que  $Le^2 \ll -\Psi \ll 1$  et  $Pr \sim \infty$ ) pour prédire la transition entre convection oscillante et convection stationnaire :

Sachant que la vitesse caractéristique de la convection est donnée par  $\kappa$  tandis que celle des ondes est liée à  $D (= \kappa Le)$ , l'effet d'homogénéisation dû à la convection est plus important sur la distribution de concentration que sur celle de la température. Au sein de l'écoulement, les gradients de concentration sont donc détruits tandis qu'ils restent présents (à cause de l'effet Soret) dans les couches limites proches des parois. L'analyse de ces couches limites permet alors de prédire la vitesse de phase des ondes propagatives, ce qui mène en particulier au fait que celle-ci doit s'annuler pour une vitesse de convection  $\vec{u}_c$  donnée. Ainsi, une fois cette valeur de  $\vec{u}_c$  évaluée par l'étude de la convection d'un fluide pur, la valeur critique  $Ra_{osc \rightarrow sta}$  pour laquelle a lieu la transition vers la stationnarité pour un liquide binaire est obtenue.

Cette analyse mène notamment à la relation asymptotique suivante :

$$Ra_{osc \rightarrow sta} \propto |\Psi|^{\frac{8}{7}}$$

Touiri et al. (1996) ont mené une série d'expériences dans des cavités de grande extension (hauteur  $\times$  largeur  $\times$  profondeur =  $1 \times 34.4 \times 2.8$  et  $1 \times 43.6 \times 3$ ) avec des mélanges eau-éthanol ( $Pr \sim 10$ ,  $Le \sim 10^{-2}$  et  $\Psi \in [-0.6; -0.1]$ ) dans le but de vérifier une telle tendance. Leurs résultats s'avèrent en fort désaccord avec le critère proposé : Bien qu'ils obtiennent une valeur de  $Ra_{osc \rightarrow sta}$  qui augmente avec  $|\Psi|$ , ils n'observent pas de comportement en loi de puissance de ce seuil. De plus, dans un domaine assez restreint en  $\Psi$  où un comportement en puissance semble paraître, l'exposant serait plutôt de l'ordre de 0.74 que de  $8/7 = 1.14$ .

Une telle disparité entre théorie et expérience est vraisemblablement imputable aux valeurs trop importantes de  $|\Psi|$  des mélanges utilisés, bien que d'autres facteurs tels que des effets non-Boussinesq et/ou l'extension finie du dispositif ne soient pas à exclure. Quoi qu'il en soit, ces résultats montrent clairement que la transition entre régimes oscillant et stationnaire est encore loin d'être comprise.

## Deuxième partie

# Modélisation de la convection thermique d'un liquide binaire

Les deux chapitres de cette partie sont relatifs aux équations qui régissent la convection thermique d'un fluide binaire.

Le premier chapitre est consacré à la mise en équation du problème. Il y est montré comment en partant de considérations thermodynamiques, on obtient, moyennant un certain nombre d'hypothèses, les expressions des couplages existant entre les différentes variables du système. Les propriétés de symétrie des solutions de ce dernier sont ensuite présentées.

Le deuxième chapitre expose les caractéristiques principales de l'outil numérique utilisé pour suivre l'évolution des solutions du système. Suit une description des considérations de précision qui ont été respectées pour s'assurer de la bonne convergence numérique des résultats. La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation de quelques résultats généraux et particuliers sur les systèmes dynamiques dans la mesure où ils s'avéreront par la suite fort utile pour analyser les bifurcations et comportements dynamiques des solutions.

# Chapitre 3

## Equations d'évolution du système

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations qui régissent la convection thermique d'un fluide binaire. Il s'agit principalement de montrer d'où celles-ci proviennent et dans le cadre de quelles hypothèses elles sont valables. Seules les étapes importantes (notamment au sujet des expressions et significations des effets Soret et Dufour) seront détaillées. Tous les calculs intermédiaires permettant de passer de l'une des étapes à la suivante sont décrits dans des ouvrages de référence tels que ceux de Platten & Legros (1984), Landau & Lifchitz (1971) ou Jan et al. (1996).

### 3.1 Considérations générales

On s'intéresse à un fluide newtonien de densité  $\rho$ . Ce fluide est un mélange de plusieurs constituants parfaitement miscibles et chimiquement inertes. Pour tout ce qui suit, toute référence à la concentration  $C_k$  du composé  $k$  est à prendre au sens d'une concentration **massique** (ou titre massique), c'est à dire comme étant la quantité de masse de  $k$  par unité de masse du mélange. De ce fait,  $C_k \in [0; 1]$  et  $\sum_k C_k = 1$ . Les équations données dans le présent chapitre sont exprimées pour des mélanges polynaires, avec des précisions sur leur application au cas des mélanges binaires. Lorsqu'il s'agira de ces derniers, on utilisera par convention le terme de soluté pour faire référence au plus lourd des deux constituants, quelque soit la concentration de chacun des composés.

#### 3.1.1 Conservation de la masse et incompressibilité

La conservation de la masse d'un volume de fluide implique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (3.1)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse (barycentrique) du volume de fluide. Lorsque l'on considère ce dernier comme incompressible (c.à.d.  $\rho$  est prise comme étant constante, ce qui est une bonne approximation pour la majorité des liquides, Platten & Legros, 1984), cette expression se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Conservation de la quantité de mouvement et hypothèses d'Oberbeck-Boussinesq

L'expression de la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est donnée par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad , \quad (3.3)$$

où  $P$  est la pression et  $\mu$  la viscosité du fluide.

Cette équation se simplifie dans le cadre des hypothèses (d'Oberbeck-Boussinesq) suivantes :

1. Les caractéristiques physiques (viscosité, dilatabilité, ...) du mélange sont constantes. Leurs valeurs sont celles évaluées à un état de référence donné (de température  $T_0$ , concentrations  $C_{k,0}$  et masse volumique  $\rho_0$  à une pression  $P_0$ ).
2. La masse volumique du mélange peut s'exprimer comme une fonction linéaire de la température et des concentrations des constituants.
3. Toute variation de la masse volumique est présumée être faible ( $\rho \simeq \rho_0$ ) et n'est donc à prendre en compte que dans les cas où apparaît un terme du type  $(\rho - \rho_0)$ .

Ainsi, pour un fluide binaire,  $\rho$  est de la forme suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(C_1 - C_{1,0})] \quad (3.4)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les dilatabilités thermique et massique (évaluées à l'état de référence) :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{C_{1,0}, P_0} \quad , \quad \beta = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_1} \right)_{P_0, T_0}$$

$\alpha$  est positif et, dans la mesure où on fait le choix de considérer le composé 1 comme étant le soluté<sup>1</sup>, il en est de même pour  $\beta$ .

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.5)$$

où  $\nu = \mu/\rho_0$  est la viscosité cinématique (ou diffusivité de quantité de mouvement).

## 3.2 Conservation de la masse de chaque constituant

On suppose que tous les composants du mélange sont présents en tout point de l'espace et qu'il n'y a pas de réactions chimiques<sup>2</sup>. L'équation de conservation de la masse pour chaque constituant  $k$  est :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k)$$

<sup>1</sup>Suivant la nomenclature exposée au début de ce chapitre, le composé 1 est pris comme étant plus lourd que le composé 2.

<sup>2</sup>Il apparaîtrait alors un terme source dans l'équation de conservation

avec

$$\vec{v}_k = \vec{v} + \vec{w}_k \quad \text{et} \quad \rho_k = \rho C_k$$

où  $\vec{w}_k$  est la vitesse de diffusion du composé  $k$  par rapport à la vitesse barycentrique  $\vec{v}$  du volume considéré.

En utilisant ces deux dernières équations et le fait que le flux de diffusion de l'espèce  $k$  est donné par  $\vec{J}_k = \rho_k \vec{w}_k$ , l'équation de conservation de la masse du composé  $k$  devient :

$$\frac{\partial(\rho C_k)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k - \vec{\nabla} \cdot (\rho C_k \vec{v})$$

Sachant d'autre part que toute quantité  $\phi$  arbitraire vérifie

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi \vec{v})$$

on obtient finalement :

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k \quad (3.6)$$

### 3.3 Conservation de l'énergie

L'énergie totale  $E$ , par unité de masse, peut être vue comme la somme de trois termes : énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}v^2$ , énergie potentielle  $E_p$  et énergie interne  $u$  (ces quantités sont elles aussi exprimées par unité de masse). Suivant le principe de la conservation de l'énergie, toute variation de l'énergie  $E$  dans un volume donné ne peut être due qu'à un flux d'énergie  $\vec{J}_E$  entrant ou sortant de celui-ci. Ce bilan, sous forme locale, s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_E$$

Par soustraction des équations bilans pour  $E_c$  et  $E_p$  (Platten & Legros, 1984) à celle-ci, on obtient l'équation d'évolution de l'énergie interne :

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (3.7)$$

où  $\vec{q}$  est le flux de chaleur.

### 3.4 Sources et flux d'entropie

Dans tout ce qui suit, les variables thermodynamiques sont toujours rapportées à une unité de masse du mélange (les variables sont alors dites "spécifiques"). Ainsi, la volume spécifique est le volume  $V$  occupé par une unité de masse du fluide ; d'où une correspondance directe entre les variables  $V$  et  $\rho$  :  $V = 1/\rho$ , qui mène à la forme différentielle :

$$dV = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (3.8)$$

### 3.4.1 Equation bilan de l'entropie et equation de Gibbs

On peut définir une entropie spécifique  $s$ , un flux d'entropie  $\vec{J}_s$  et une production d'entropie  $\sigma_s$ , tels que :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s + \sigma_s \quad (3.9)$$

Selon le deuxième principe de la thermodynamique,  $\sigma_s \geq 0$ .

D'autre part, l'hypothèse de l'équilibre local (les variables thermodynamiques et les relations entre les variables d'état sont les mêmes hors équilibre qu'à l'équilibre) implique, pour tout temps  $t$  et toute position  $\vec{r}$  :

$$s(\vec{r}, t) = s\left(u(\vec{r}, t), V(\vec{r}, t), C_k(\vec{r}, t)\right)$$

où  $u$ ,  $V$  et  $C_k$  sont l'énergie interne spécifique, le volume spécifique et les concentrations massiques spécifiques.

Cette équation mène à la forme différentielle suivante :

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_{V, C_k} du + \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_{u, C_k} dV + \sum_k \left(\frac{\partial s}{\partial C_k}\right)_{u, V, C_{k'}} dC_k, \quad (k' \neq k)$$

Cette relation permet de définir la température  $T$ , la pression  $P$  et les potentiels chimiques  $\mu_k$  :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_{V, C_k}, \quad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_{u, C_k} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_k}{T} = -\left(\frac{\partial s}{\partial C_k}\right)_{u, V, C_{k'}}$$

En substituant ces variables dans la forme différentielle de l'entropie spécifique  $s$ , on obtient l'équation de Gibbs :

$$Tds = du + PdV - \sum_k \mu_k dC_k \quad (3.10)$$

### 3.4.2 Equation d'évolution de l'entropie

L'équation de Gibbs (3.10), prise en terme de dérivée temporelle et multipliée par  $\rho$  donne :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{du}{dt} + \rho P \frac{dV}{dt} - \rho \sum_k \mu_k \frac{dC_k}{dt}$$

En remplaçant  $du/dt$ ,  $dV/dt$  et  $dC_k/dt$  par leurs expressions (équations 3.7, 3.8 et 3.6) et en tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité, on obtient la relation :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{1}{T} \sum_k \mu_k \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k \quad (3.11)$$

qui peut aussi être mise sous la forme :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{T} \left( \vec{q} - \sum_k \mu_k \vec{J}_k \right) \right] + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{T} \right) - \sum_k \vec{J}_k \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\mu_k}{T} \right) \quad (3.12)$$

La comparaison de cette expression avec l'équation 3.9 permet alors de déduire les expressions du flux  $\vec{J}_s$  et de la production  $\sigma_s$  d'entropie :

$$\vec{J}_s = \frac{1}{T} \left( \vec{q} - \sum_k \mu_k \vec{J}_k \right) \quad (3.13)$$

$$\sigma_s = \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{T} \right) - \sum_k \vec{J}_k \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\mu_k}{T} \right) \quad (3.14)$$

### 3.4.3 Expression de la conservation de l'énergie

On peut transformer l'équation bilan de l'entropie (3.12) en utilisant les relations thermodynamiques (posées à pression constante) suivantes :

$$\begin{aligned} h_k &= \mu_k + T s_k \\ ds_k &= \left( \frac{\partial s_k}{\partial T} \right)_{C_k, P} dT + \left( \frac{\partial s_k}{\partial C_k} \right)_{T, P} dC_k \\ \frac{C_{P, C_k}}{T} &= \left( \frac{\partial s_k}{\partial T} \right)_{C_k, P} \\ s_k &= \left( \frac{\partial s_k}{\partial C_k} \right)_{T, P} = - \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial T} \right)_{C_k, P} \end{aligned}$$

où  $h_k$  est l'enthalpie spécifique du composé  $k$  et  $C_{P, C_k}$  la chaleur spécifique à pression et compositions constantes du mélange. On obtient alors une équation d'évolution pour la température en fonction des flux thermique  $\vec{q}$  et massiques  $\vec{J}_k$  :

$$\rho C_{P, C_k} \frac{dT}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \sum_k h_k \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k \quad (3.15)$$

### 3.4.4 Couplage entre flux thermique et massiques et relations d'Onsager

Le terme de production d'entropie  $\sigma_s$  (équation 3.14) peut être interprété comme une somme de combinaisons de flux  $j_\alpha$  et forces  $F_\alpha$  généralisés :

$$\sigma_s = \sum_\alpha j_\alpha F_\alpha$$

Il est important de remarquer que cette décomposition en forces et flux généralisés est relativement arbitraire et laisse une certaine latitude quand au choix de chacun. De plus,  $\sigma_s$  étant nulle à l'équilibre, il en est de même pour les  $j_\alpha$  et  $F_\alpha$ . En général, on considère les flux comme contenant les quantités inconnues, contrairement aux forces. A priori, les flux dépendent des forces (ainsi que des variables d'état  $T, P, \mu_k$ ). Un développement au premier ordre autour du point d'équilibre (où  $j_\alpha = F_\alpha = 0$ ) permet d'écrire :

$$j_\alpha = \sum_\beta \left( \frac{\partial j_\alpha}{\partial F_\beta} \right)_{eq} F_\beta$$

ce qui est assimilé à :

$$j_\alpha = \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} F_\beta \quad (3.16)$$

où les coefficients phénoménologiques  $L_{\alpha\beta}$  dépendent des variables d'état. Dans un cadre très général, Onsager a montré qu'il y a une symétrie entre les coefficients "diagonaux" telle que :  $L_{\alpha'\alpha} = L_{\alpha\alpha'}$ .

Si on se place dans le cas d'un fluide binaire et que l'on suit le choix de Platten & Legros (1984) quant aux couples de flux et de forces à considérer :

Flux $j_\alpha$	Force $F_\alpha$
$\vec{q}_+ = \vec{q} - \sum_k h_k \vec{J}_k$	$\vec{\nabla} T$
$\vec{J}_1$	$\frac{(\vec{\nabla} \mu_1)_T}{T}$

où  $\vec{q}_+$  est le flux de chaleur modifié.  
On obtient alors le système suivant :

$$\vec{q}_+ = L_{11} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{T} \right) + L_{12} \frac{(\vec{\nabla} \mu_1)_T}{T} \quad (3.17)$$

$$\vec{J}_1 = L_{21} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{T} \right) + L_{22} \frac{(\vec{\nabla} \mu_1)_T}{T} \quad (3.18)$$

Avec par ailleurs,

$$(\vec{\nabla} \mu_1)_T = \frac{-1}{C_2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial C_1} \right)_{T,P} \vec{\nabla} C_1$$

Ainsi, pour pouvoir exprimer ces flux en fonction de  $T$  et  $C_1$ , il suffit de déterminer l'expression des coefficients phénoménologiques  $L_{ij}$ .

### 3.4.5 Détermination des coefficients phénoménologiques

#### Cas des coefficients diagonaux

En l'absence de diffusion massique ( $\vec{J}_1 = \vec{0}$ ) et de couplage ( $L_{12} = L_{21} = 0$ ), le système se réduit à :

$$\vec{q}_+ = \vec{q} = -\frac{L_{11}}{T^2} \vec{\nabla} T$$

Par identification avec la loi de Fourier  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$  (où  $\lambda$  est la conductivité thermique du milieu), on en déduit :

$$L_{11} = \lambda T^2 \quad (3.19)$$

De même, en l'absence de gradient thermique (et de couplage), le système devient :

$$\vec{J}_1 = \frac{-1}{TC_2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial C_1} \right)_{T,P} \vec{\nabla} C_1$$

Par identification avec la loi de diffusion (isotherme) de Fick :  $\vec{J}_1 = -\rho D \vec{\nabla} C_1$  (où  $D$  est la diffusivité solutale du soluté), on obtient :

$$L_{22} = \frac{\rho D T C_2}{\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial C_1}\right)_{T,P}} \quad (3.20)$$

### Cas des coefficients non-diagonaux

Contrairement au cas des coefficients diagonaux, on ne peut pas chercher de cas limite qui permette d'identifier séparément chacun des termes non-diagonaux puisque par leur définition même, ils sont simultanément présents et non nuls en présence de flux thermique et solutaux. Néanmoins, ces coefficients non-diagonaux doivent satisfaire les contraintes suivantes :

- La relation d'Onsager ( $L_{ij} = L_{ji}$ ).
- $L_{12}$  et  $L_{21}$  doivent par ailleurs tendre vers 0 dans la double limite  $C_1 \rightarrow 0$  et  $C_2 \rightarrow 0$  (lorsque la proportion d'un des constituants du mélange tend vers zéro, les caractéristiques du fluide doivent tendre vers celles d'un corps pur).

De même qu'il y a un certain choix arbitraire pour les expressions des flux et forces généralisées, il y a plusieurs manières (heuristiques) possibles d'exprimer les dépendances de  $L_{12}$  et  $L_{21}$ .

Suivant Platten & Legros (1984), on peut prendre :

$$L_{12} = D_F \rho C_1 C_2 T^2 \quad (3.21)$$

$$L_{21} = D_T \rho C_1 C_2 T^2 \quad (3.22)$$

Avec  $D_F = D_T$ , où  $D_T$  est dit coefficient de thermodiffusion et  $D_F$  coefficient de Dufour<sup>3</sup>.

Cette formulation mène aux expressions suivantes des flux  $\vec{q}_+$  et  $\vec{J}_1$  :

$$\vec{q}_+ = -\lambda \vec{\nabla} T - \rho D_F C_1 T \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial C_1}\right)_{T,P} \vec{\nabla} C_1 \quad (3.23)$$

$$\vec{J}_1 = \rho C_1 C_2 D_T \vec{\nabla} T - \rho D \vec{\nabla} C_1 \quad (3.24)$$

### Autre formulation

Signalons le système obtenu (et tout aussi couramment utilisé) par Landau & Lifchitz (1971), qui, avec un choix différent sur les expressions des flux et forces généralisées obtiennent le système :

$$\vec{q} = -\left(\lambda + \frac{k_T}{T} D N'\right) \vec{\nabla} T - D N' \vec{\nabla} C_1 \quad (3.25)$$

$$\vec{J}_1 = -\rho D \left(\frac{k_T}{T} \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} C_1\right) \quad (3.26)$$

$$\text{avec } N' = \rho \left( \mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{C,P} + k_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial C_1}\right)_{T,P} \right) \quad (3.27)$$

$k_T$  étant le rapport de thermodiffusion et  $\mu$  le potentiel chimique réduit du mélange binaire donné par :  $\mu = (\mu_1/C_1) - (\mu_2/C_2)$ .

---

<sup>3</sup>Les coefficients  $D_T$  et  $D_F$  sont de dimension  $m^2/s/K$  et ne sont donc pas des diffusivités mais des diffusivités par unité de température.

Chacune de ces deux formulations met l'accent sur une dépendance particulière des termes non-diagonaux. La concentration apparaît explicitement dans celle obtenue par Platten & Legros (1984) tandis que c'est la température pour celle de Landau & Lifchitz (1971).

Le lien entre les deux est donné par :

$$-\frac{k_T}{T} = C_1 C_2 \frac{D_T}{D} \quad (3.28)$$

En général, le rapport entre le coefficient de thermodiffusion  $D_T$  et la diffusivité solutale  $D$  est défini comme étant le coefficient de Soret  $S_T$ , dans lequel est parfois intégré le produit  $C_1 C_2 = C_1(1 - C_1)$  dans la mesure où les variations de concentrations (sur tout le domaine contenant le fluide) sont présumées faibles par rapport à celles du mélange au repos (c.à.d : lorsque  $C_1 \simeq C_{1,0}$ ).

### 3.4.6 Equations d'évolution de la température et de la concentration pour un mélange binaire

Une fois les expressions des flux déterminées, on peut récrire l'équation de conservation de l'énergie (3.15) en fonction de  $T$  et  $C_1$ , moyennant le fait de considérer les quantités  $\lambda$ ,  $k_T/T = k_T/T_0$  et  $DN'$  comme des constantes (évaluées à l'état de référence  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $C_{1,0} = C_0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho C_{P_0, C_0}} \left( -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + h \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} &= \left[ \kappa + \left( \frac{k_T}{T_0} \right)^2 DN \right] \nabla^2 T + \left[ \left( \frac{k_T}{T_0} \right) DN \right] \nabla^2 C_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

où apparaissent  $\kappa = \lambda/(\rho_0 C_{P_0, C_0})$ , la diffusivité thermique du mélange et  $N = (T_0/C_{P_0, C_0}) (\partial\mu/\partial C_1)_{T_0, P_0}$ , un paramètre thermodynamique (positif).

De même, l'équation de conservation des espèces (3.6) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_1 \\ \Leftrightarrow \frac{dC_1}{dt} &= D \left( \frac{k_T}{T_0} \right) \nabla^2 T + D \nabla^2 C_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

où les quantités  $\rho D$  et  $k_T/T = k_T/T_0$  ont été considérées comme constantes.

## 3.5 Effets Soret et Dufour

Les équations (3.29) et (3.30) forment un système couplé où n'interviennent que la température  $T$  et la concentration du soluté  $C_1$ .

Pour l'équation d'évolution de la température, on observe que la présence d'un gradient de concentration contribue au flux thermique ; c'est l'effet Dufour.

Parallèlement, l'équation d'évolution de la concentration montre qu'un flux massique résulte de la présence d'un gradient thermique ; c'est l'effet Soret.

Typiquement, le gradient de concentration induit par le gradient thermique est faible, à cause de la petitesse du rapport  $D_T/D$  qui gère cette séparation (Platten & Legros, 1984). Par ailleurs,

la différence de température induite par la différence de concentration via l'effet Dufour est au mieux de l'ordre de  $1K$  dans les gaz et de l'ordre de  $10^{-3}K$  dans les liquides (Platten & Legros, 1984). Ce constat implique que l'on peut négliger l'effet Dufour (ce qui revient à poser  $N = 0$  dans l'équation 3.29) lorsque l'on considère un **liquide** binaire.

## 3.6 Adimensionnement du système

Toutes les considérations discutées dans les sections précédentes permettent d'obtenir un système d'équations décrivant l'évolution d'un liquide binaire en présence de l'effet Soret (Pour alléger la notation, on prendra pour toute la suite  $C_1 = C$ ) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0}\vec{g} + \nu\vec{\nabla}^2\vec{v} \quad (3.31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\nabla^2T \quad (3.33)$$

$$\frac{dC}{dt} = D\left(\frac{k_T}{T_0}\right)\nabla^2T + D\nabla^2C \quad (3.34)$$

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(C - C_0)] \quad (3.35)$$

### 3.6.1 L'état conductif

Si on présume que la couche fluide (de hauteur  $h$ ) est au repos ( $\frac{d}{dt} = 0$  et  $\vec{v} = \vec{0}$ ) et soumise à une différence (verticale) de température  $\Delta T$ , on a les conditions aux limites (thermiques) suivantes :

- Température constante  $T_+ = T_0 - \frac{1}{2}\Delta T$  imposée en haut de la couche ( $z = h/2$ ),
- Température constante  $T_- = T_0 + \frac{1}{2}\Delta T$  en bas de la couche ( $z = -h/2$ ).

La distribution en température du système est alors :

$$T(\vec{r}) = T_{cond}(z) = T_0 - \frac{z}{h}\Delta T \quad (3.36)$$

Pour déduire la distribution en concentration de cet état, il suffit de remarquer qu'au repos il n'y a pas de flux de diffusion massique :

$$\vec{J}_{cond} = \vec{0} \quad (3.37)$$

$$= \rho D \left(\frac{k_T}{T_0}\right) \vec{\nabla} T_{cond} + \rho D \vec{\nabla} C_{cond} \quad (3.38)$$

Ce qui mène à :

$$C(\vec{r}) = C_{cond}(z) = -\frac{z}{h} \left(\frac{k_T}{T_0}\right) \Delta T + K \quad (3.39)$$

où la constante d'intégration  $K$  est complètement déterminée par la conservation de l'espèce sur l'intégralité du volume  $\mathcal{V}$  de la couche de fluide considérée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} \iiint_{\mathcal{V}} C(\vec{r}) d\mathcal{V} &= C_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{h} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C(z) dz &= C_0 \end{aligned}$$

qui implique  $K = C_0$ . La distribution en concentration de l'état conductif est donc donnée par :

$$C_{cond}(z) = -\frac{z}{h} \left( \frac{k_T}{T_0} \right) \Delta T + C_0 \quad (3.40)$$

Remarque :

La différence de température  $\Delta T = T(z = -\frac{1}{2}) - T(z = \frac{1}{2})$  imposée à la couche de liquide crée un gradient vertical de température qui induit un gradient de concentration menant à une différence de concentration  $\Delta C = C_{cond}(z = -\frac{1}{2}) - C_{cond}(z = \frac{1}{2}) = -(k_T/T_0)\Delta T$  entre le bas et le haut de la couche. La distribution en densité du fluide dans l'état conductif est alors :

$$\rho_{cond}(z) = \rho_0 \left[ 1 + \alpha \frac{z}{h} \Delta T - \beta \frac{z}{h} \left( \frac{k_T}{T_0} \right) \Delta T \right] \quad (3.41)$$

Le gradient de densité de l'état conductif est donc tel que :

$$\vec{\nabla} \rho_{cond} = \left[ 1 - \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{k_T}{T_0} \right) \right] \alpha \frac{\Delta T}{h} \vec{e}_z \quad (3.42)$$

Selon le signe du coefficient de Soret ( $S_T = -k_T/T_0$ ), ce gradient (déstabilisant) sera plus ou moins raide que celui qui serait obtenu dans un fluide pur soumis au même  $\Delta T$ .

### 3.6.2 Ecart à l'état conductif

La connaissance des expressions analytiques ( $\vec{v}_{cond} = \vec{0}$ ,  $P_{cond}$ ,  $\rho_{cond}$ ,  $T_{cond}$  et  $C_{cond}$ ) décrivant l'état conductif permet de récrire les équations d'évolution en termes d'écart à celui-ci. En introduisant  $\vec{\hat{v}} = \vec{v}$ ,  $\hat{p} = P - P_{cond}$ ,  $\hat{\rho} = \rho - \rho_{cond}$ ,  $\hat{\theta} = T - T_{cond}$  et  $\hat{\gamma} = C - C_{cond}$  et en tenant compte des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} P_{cond} &= \rho_{cond} \vec{g} \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T_{cond} &= -\frac{\Delta T}{h} \vec{v} \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) C_{cond} &= -\frac{\Delta C}{h} \vec{v} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

on obtient alors le système :

$$\frac{d\vec{\hat{v}}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} \hat{p}}{\rho_0} + [-\alpha \hat{\theta} + \beta \hat{\gamma}] \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\hat{v}} \quad (3.43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{v}} = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{\Delta T}{h} \vec{v} \cdot \vec{e}_z + \kappa \nabla^2 \hat{\theta} \quad (3.45)$$

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt} = \frac{\Delta C}{h} \vec{v} \cdot \vec{e}_z + D \left( \frac{k_T}{T_0} \right) \nabla^2 \hat{\theta} + D \nabla^2 \hat{\gamma} \quad (3.46)$$

### 3.6.3 Echelles et paramètres

Plutôt que de travailler sur les variables dimensionnelles, on adimensionne le système précédent en utilisant les échelles suivantes :

- Les longueurs sont rapportées à la hauteur de la couche  $h$ ,
- Le temps est rapporté à celui de la diffusion thermique sur cette même hauteur :  $h^2/\kappa$ ,
- L'échelle de vitesse est alors donnée par  $\kappa/h$ ,
- La température est rapportée à  $\Delta T$ ,
- La concentration du soluté est rapportée à l'écart obtenu pour l'état conductif  $\Delta C = (k_T/T_0)\Delta T$ ,
- L'ordre de grandeur de la pression s'alignant toujours sur celui des termes dominants, l'échelle de pression est naturellement donnée par  $\rho_0\kappa^2/h^2$ .

Le système, une fois adimensionné, est le suivant (pour alléger la notation, on omet pour la suite les  $\hat{\cdot}$ , étant entendu que  $p$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  feront toujours référence aux écarts aux profils conductifs) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + Ra Pr (\theta + \Psi \gamma) \vec{e}_z + Pr \nabla^2 \vec{v} , \quad (3.47)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 , \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_z + \nabla^2 \theta , \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \gamma = \vec{v} \cdot \vec{e}_z + Le \nabla^2 \gamma - Le \nabla^2 \theta , \quad (3.50)$$

où apparaissent les quatre paramètres suivants :

le nombre de Rayleigh : 
$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \kappa} ,$$

le nombre de Prandtl : 
$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} ,$$

le nombre de Lewis : 
$$Le = \frac{D}{\kappa} ,$$

le paramètre de séparation : 
$$\Psi = -\frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{k_T}{T_0} \right) .$$

Pour décrire entièrement le comportement d'un liquide binaire, il ne faut pas moins de quatre paramètres. Trois d'entre eux ( $Pr$ ,  $Le$  et  $\Psi$ ) dépendent exclusivement de la nature du mélange considéré. Le quatrième,  $Ra$ , est de surcroît proportionnel au forçage thermique imposé, ce qui en fait le paramètre de contrôle usuel du système.

## 3.7 Géométrie et conditions aux limites

En dehors des quatre paramètres évoqués ci-dessus, la géométrie et le "degré de confinement" associé interviennent sur le comportement convectif du mélange. Comme évoqué dans la partie précédente de ce manuscrit, l'étude des influences de ces derniers est le but principal des présents travaux.

### 3.7.1 Géométrie adoptée

On se place dans le cadre d'un confinement en géométrie cylindrique. Le cylindre est considéré droit et vertical (figure 3.1), de hauteur  $h$  et de rayon  $\Gamma h$ . De plus, tous les écoulements modélisés

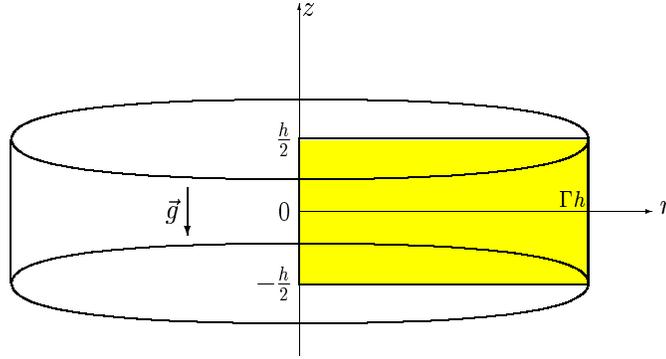


FIG. 3.1 – *Illustration de la configuration géométrique modélisée : Le fluide est confiné dans un cylindre vertical de rapport d'aspect  $\Gamma$ . Suivant l'hypothèse d'axisymétrie, la connaissance des champs dans le plan grisé suffit à décrire l'écoulement.*

sont présumés axisymétriques (c.à.d : bidimensionnels).

Précisons ici qu'imposer l'axisymétrie des solutions rend ces dernières a priori non représentatives des écoulements (plutôt enclins à être tridimensionnels que bidimensionnels, ainsi que le montrent les résultats présentés dans la partie précédente) qui se développent réellement dans le système. Cette volonté de se limiter à des simulations bidimensionnelles résulte de celle de se placer dans la continuité des études relatives aux comportements convectifs de liquides binaires en milieu de grande extension et d'évaluer en particulier les conséquences induites par une extension latérale réduite.

Cette étude est donc à prendre au sens d'un premier pas (au même titre qu'une analyse de l'état conductif vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles le serait) vers la compréhension des phénomènes physiques en jeu dans de tels systèmes.

Afin de cerner l'incidence de la présence du confinement latéral, on s'intéressera par la suite à plusieurs valeurs de rapports d'aspect (tous de l'ordre de l'unité), notamment  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , 1 et 2.

### 3.7.2 Choix des conditions aux limites

En plus du choix de la géométrie du confinement, il est nécessaire de fixer les conditions aux limites pour les champs. En l'occurrence, deux séries de conditions aux limites ont été adoptées. Elles sont très légèrement différentes l'une de l'autre et respectivement représentatives de deux types de systèmes physiques.

#### Premier cas : Convection dans une boîte fermée

On considère que le liquide binaire est tout simplement contenu dans une boîte cylindrique fermée. Pour bien fixer les idées sur les conditions aux frontières adoptées, on les présente d'abord dans le cadre du système (adimensionné) complet (c.à.d : sans avoir soustrait l'état conductif). Elles sont les suivantes :

1. Il y a adhérence du fluide aux parois :

$$u = w = 0 \quad \text{en} \quad r = \Gamma, z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$u = w = 0 \quad \text{en} \quad r \in [0, \Gamma], z = \pm \frac{1}{2},$$

où  $u$  et  $w$  sont les composantes radiales et verticales de la vitesse :  $\vec{v} = u \vec{e}_r + w \vec{e}_z$ .

2. Les valeurs de la température sont imposées sur les parois horizontales isothermes :

$$T\left(z = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad T\left(z = \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

La paroi latérale est supposée parfaitement adiabatique :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = \Gamma.$$

3. Il n'y a pas de flux de matière à travers les parois :

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad r = \Gamma, z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad r \in [0, \Gamma], z = \pm \frac{1}{2},$$

où  $\vec{J}$  est le flux massique de soluté et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à la paroi considérée. En utilisant l'expression de  $\vec{J}$  (adimensionné), cette condition d'imperméabilité implique :

$$\left(\vec{\nabla}C - \vec{\nabla}T\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{aux parois.}$$

En termes des variables représentant l'écart à l'état conductif, les conditions aux limites pour  $\theta$  et  $\gamma$  se ramènent à :

$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad r \in [0, \Gamma], z = \pm \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = \Gamma, z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \text{en} \quad r \in [0, \Gamma], z = \pm \frac{1}{2}.$$

## Deuxième cas : Convection dans un pont liquide

Dans certains procédés de croissance cristalline, un volume de liquide est maintenu par capillarité entre deux barreaux verticaux et cylindriques. Dans la mesure où les effets de tension de surface sont négligés et la zone fondue considérée comme cylindrique (ainsi que l'ont fait Wanschura et al., 1996), le système est presque identique à celui présenté ci-dessus. La seule différence entre les deux vient du fait de considérer la paroi latérale comme étant une surface libre. Ceci implique alors d'imposer une condition non plus d'adhérence mais de glissement sur celle-ci :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = \Gamma, z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

### 3.7.3 Symétries du système

Le système d'équations (3.47-3.50), pris dans le cadre d'une géométrie cylindrique<sup>4</sup> axisymétrique, possède une symétrie par rapport au plan  $z = 0$ . Une conséquence directe de cette symétrie haut-bas (ou miroir) sur les solutions du système d'équations est la suivante :

Si  $X_1 = (u_1, w_1, p_1, \theta_1, \gamma_1)$  est solution du système (3.47-3.50), alors  $X_2 = (u_2, w_2, p_2, \theta_2, \gamma_2)$  tel que :

$$\begin{aligned} u_2(r, z, t) &= u_1(r, -z, t) \\ w_2(r, z, t) &= -w_1(r, -z, t) \\ p_2(r, z, t) &= p_1(r, -z, t) \\ \theta_2(r, z, t) &= -\theta_1(r, -z, t) \\ \gamma_2(r, z, t) &= -\gamma_1(r, -z, t) \end{aligned}$$

est aussi solution du système (3.47-3.50).

Dans le cas de solutions stationnaires, deux possibilités se présentent alors :

- Soit  $u, p, w, \theta$  et  $\gamma$  sont de parité donnée suivant  $z$  (paires pour les deux premiers et impaires pour les autres) et la solution est simplement invariante par l'application de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$  donnée ci-dessus.
- Soit tel n'est pas le cas et les solutions existent alors par paires, la connaissance de l'une suffisant pour reconstruire l'autre par l'application de  $\mathcal{M}$ .

Les solutions périodiques (de période  $\tau$ ) peuvent posséder une symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  reliant les valeurs des champs d'une demi-période à l'autre. Ils sont alors tels que :

$$\begin{aligned} u_2(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= u_1(r, -z, t) \\ w_2(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -w_1(r, -z, t) \\ p_2(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= p_1(r, -z, t) \\ \theta_2(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -\theta_1(r, -z, t) \\ \gamma_2(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -\gamma_1(r, -z, t) \end{aligned}$$

En d'autres termes, ces oscillations sont telles qu'une translation temporelle d'une demi-période est équivalente à l'application de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$ .

A nouveau on peut distinguer deux cas :

- Soit l'oscillation possède cette propriété symétrie temporelle  $\mathcal{M}$ .
- Soit l'oscillation ne possède pas cette propriété et il existe une seconde solution, image de la première par l'application de  $\mathcal{M}$ .

Comme le montreront les résultats présentés par la suite, l'existence, tout comme la perte, de la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  des états périodiques ont des conséquences importantes sur l'évolution de ceux-ci.

Précisons en outre que pour tout écoulement possédant cette symétrie, il y a nécessairement (Swift & Wiesenfeld, 1984) un découplage entre les parités spatiales des variables et les périodicités

---

<sup>4</sup>Pour être tout à fait rigoureux, il faut de plus que les conditions aux limites imposées aux variables soient elles aussi symétriques par rapport au plan  $z = 0$ , ce qui est le cas de celles évoquées dans les paragraphes précédents

temporelles de ceux-ci. Dans le cas présent, ceci implique que les parties paires et impaires (suivant  $z$ ) de  $u$  et  $p$  seront respectivement de période  $\tau/2$  et  $\tau$ , tandis que les parties impaires (paires) des trois autres champs seront nécessairement de période  $\tau$  ( $\tau/2$ ).

Les conséquences subsidiaires de ce découplage entre parités spatiales et temporelles quant aux types de transitions (bifurcations) qui peuvent ou ne peuvent alors avoir lieu ont été établies par Swift & Wiesenfeld (1984). Le détail de ces résultats et leurs implications sur ceux obtenus dans la présente étude sera donné avec la présentation de ces derniers.

# Chapitre 4

## L'outil numérique

Le code numérique utilisé pour résoudre les équations du mouvement du liquide binaire en géométrie cylindrique a été développé (et validé) par Delouche (1996). Ce chapitre contient une description succincte de l'outil lui-même, suivie d'une discussion sur la convergence des résultats ainsi qu'une présentation des outils (élaborés au cours des travaux présentés dans ce document) de post-traitement de ceux-ci.

### 4.1 Représentation spatiale

Les méthodes spectrales sont des méthodes dites globales car faisant intervenir tous les points du domaine (Canuto et al., 1988) dans la détermination des valeurs des dérivées en ceux-ci.

La méthode employée en l'occurrence est pseudo-spectrale (la résolution du problème ne se fait pas dans l'espace spectral). Ceci permet, moyennant une contrainte sur le choix des points de collocation (les points de maillage), de résoudre tout système différentiel du type Helmholtz :  $(D^2 - \lambda)u_n = S_n$  où  $u_n$  est le vecteur contenant les inconnues,  $\lambda$  une constante,  $S_n$  un terme source (connu) et  $D^2$  la dérivée seconde (matrice pleine), discrétisée du polynôme d'interpolation.

Les équations à résoudre lors des diverses étapes des calculs sont systématiquement ramenée à des systèmes de Helmholtz, comme le montreront les paragraphes suivants.

Le choix de se placer en géométrie cylindrique et les contraintes de collocation mènent à considérer les points de discrétisation spatiale suivants :

1. Dans la direction verticale, on utilise les points dits de Gauss-Lobatto :

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \text{ avec } j \in [0, N]$$

Remarque : Le domaine sur lequel sont répartis les points de collocation  $x_j \in [-1, 1]$  est imposé par le fait qu'il doit être celui sur lequel les polynômes de Chebyshev sont orthogonaux. Un changement de variable supplémentaire est nécessaire pour travailler sur un intervalle  $[a, b]$ .

2. Dans la direction radiale, on utilise les points dits de Gauss-Radau :

$$x_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{2N+1}\right) \text{ avec } j \in [0, N]$$

Remarque : Contrairement au cas précédent, il n'y a pas de point sur une des frontière du domaine (puisque  $x_j \in [\cos(2\pi N/(2N+1)), 1]$ ) et donc pas de condition aux limites à imposer explicitement sur celui-ci. En pratique, la frontière 'exclue' est celle correspondant à l'axe du cylindre, ce qui permet d'y faire respecter les conditions découlant naturellement de l'axisymétrie du problème.

## 4.2 Intégration temporelle

Les dérivées temporelles sont évaluées par un schéma aux différences finies à trois niveaux (les instants  $n-1$ ,  $n$  et  $n+1$ ) de type Euler retardé (d'ordre 2) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq \frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\delta t}$$

De par le choix de la représentation spatiale donnée au paragraphe précédent, les termes non-linéaires doivent aussi être évalués au temps  $n+1$ . Ceci est réalisé par l'extrapolation (partie du schéma dite d'Adams-Bashforth) suivante :

$$f_{NL}^{n+1} \simeq 2f_{NL}^n - f_{NL}^{n-1}$$

En employant ces deux développements, on peut ramener la résolution d'une équation de type advection-diffusion à la résolution d'un problème de Helmholtz.

## 4.3 Découplage vitesse-pression par projection-diffusion

Pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, une méthode particulière de découplage (Batoul et al., 1994; Labrosse et al., 1997) des champs de vitesse et pression est utilisée. Cette méthode possède les particularités d'être d'une part définie indépendamment de tout schéma temporel et d'autre part inspirée du mécanisme physique d'adaptation 'instantanée' du champ de pression aux variations des autres champs.

Le système à résoudre est du type suivant :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{S} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} , \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 , \quad (4.2)$$

où  $\vec{S}$  désigne un terme source (connu). Les deux équations sont respectivement supposées vérifiées dans  $\hat{\Omega}$ , l'intégralité du domaine et  $\Omega$ , l'intérieur de celui-ci. Sur les bords ( $\partial\Omega$ ) du domaine,  $\vec{v} = \vec{v}_0$ .

La première étape consiste à poser le changement de variables suivant :

$$\vec{v}_* = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{S} \quad (4.3)$$

$$\vec{f} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{S} \quad (4.4)$$

On a alors le système :

$$\vec{v}_* + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_* = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega} \quad (4.6)$$

$$\vec{v}_* \cdot \vec{n} = \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - \nu \vec{\nabla}^2 v_0 \right) \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.7)$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la frontière  $\partial\Omega$ .

En prenant la divergence de (4.5) et en utilisant (4.6), on obtient une équation sur  $p$  :

$$\nabla^2 p = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}, \quad (4.8)$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation de Helmholtz.

Une fois le champ de pression résolu (dans  $\Omega$ ), on utilise les équations (4.5) et (4.7) pour déterminer  $\vec{v}_*$  (dans  $\hat{\Omega}$ ).  $\vec{v}$  est alors finalement obtenu en résolvant (4.3), une équation de Helmholtz.

Lorsque cette méthode est associée à la résolution pseudo-spectrale présentée, le champ de vitesse résultant est à divergence non nulle. Il est cependant montré (Batoul et al., 1994; Labrosse et al., 1997; Tric et al., 2000) que celle-ci tend exponentiellement vers 0 lorsque le nombre de modes utilisés pour la représentation spatiale augmente (c.à.d : lorsque l'on augmente le nombre de points de maillage).

## 4.4 Convergence des résultats

Pour évaluer si des résultats numériques sont représentatifs de la physique des phénomènes décrit par les équations utilisées, il convient d'étudier la convergence de ceux-ci en fonction des paramètres numériques que sont le nombre de points de discrétisation spatiale et la valeur du pas de temps  $\delta t$  utilisé pour l'intégration temporelle. En plus de ces précautions, il convient de se fixer des critères permettant de s'assurer que l'état "final" obtenu est bien une solution du système et non un instantané d'une évolution transitoire (aussi lente soit-elle) de ce dernier. Les paragraphes suivants sont consacrés à ce sujet.

### 4.4.1 Critère de stationnarité

Dans les cas où le système tend vers un état stationnaire, le critère principalement utilisé pour déclarer la stationnarité atteinte est le suivant :

$$\text{Max} \left[ \frac{|\phi_{n+1} - \phi_n|}{|\phi_n| \delta t} \right] \leq K$$

où  $\phi_n$  représente les valeurs des quatre champs du système (les deux composantes de la vitesse  $u$  et  $w$  et les écarts au profil conductif en température  $\theta$  et en concentration  $\gamma$ ) prise en chaque point du domaine à l'instant  $n\delta t$ .  $K$  est une constante (comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ ) et  $\text{Max}[\dots]$  représente la valeur maximale évaluée sur tous les points et sur tous les champs.

La signification d'un tel critère est assez directe : Lorsqu'il est satisfait, on sait qu'alors, d'une itération temporelle à la suivante, les valeurs des fluctuations relatives des champs en tout point du domaine de calcul n'excèdent pas  $K\delta t$ .

## 4.4.2 Cas des écoulements instationnaires

Un critère du type précédent ne peut plus être mis en oeuvre à partir du moment où l'état étudié a un comportement instationnaire.

Dans le cas d'une oscillation monopériodique (ce qui est le cas de la grande majorité des écoulements instationnaires rencontrés au cours des travaux présentés par la suite), on peut évaluer la "période instantanée" de celle-ci en suivant l'évolution d'une variable dans la cavité et ses passages successifs par une valeur de référence. Lorsque la valeur instantanée de la période du signal sature, cela indique que le système est en train de tendre vers un état final monopériodique stable.

En pratique, on suit l'évolution de la pulsation instantanée du signal jusqu'à atteindre une saturation des huit premiers chiffres significatifs avant de déclarer que l'état obtenu est bien un état monopériodique stable.

## 4.4.3 Choix des maillages et pas de temps utilisés

Cette section illustre, à travers quelques exemples représentatifs, le soin avec lequel ont été réalisés les calculs qui seront présentés par la suite, et conséquemment les contraintes qui ont été appliquées sur les représentations spatiales et temporelles de ces simulations.

La validité du code étant acquise (voir Delouche, 1996), les discussions et illustrations suivantes sont présentées dans une optique "utilisateur" : l'accent étant en priorité mis sur les aspects pratiques (temps de calculs, précision effective des résultats, ...).

### Représentation spatiale

Afin d'illustrer la précision induite par l'utilisation d'une méthode spectrale pour la représentation spatiale des champs, quelques exemples de convergence de ces derniers (en fonction du nombre de modes  $N$  utilisés) sont donnés dans le tableau 4.1. Les quantités présentées sont des valeurs globales (c'est à dire intégrées sur le volume total du système). Il s'agit en l'occurrence des l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c$ , température  $\mathcal{T}$  et concentration  $\mathcal{C}$  globales. Pour les deux premières, l'écart relatif  $\delta X = |(X(N) - X(N = 100))/X(N = 100)|$  à la solution "exacte" est donné. La convergence spectrale (exponentielle) se retrouve sur l'évolution de ces quantités, tout comme sur la concentration moyenne  $\mathcal{C}$  (rappelons ici que cette dernière doit tendre vers 0, la valeur du système continu).

Ainsi qu'évoqué lors de la présentation de l'outil numérique, la méthode de projection-diffusion employée n'assure pas une divergence strictement nulle du champ de vitesse, bien que celle-ci tende vers zéro avec l'augmentation du nombre de modes  $N$  utilisés pour la représentation spatiale. L'influence de la valeur de  $N$  sur la divergence du champ de vitesse d'un écoulement convectif stationnaire est illustrée dans le tableau 4.1. Les valeurs présentées sont celles de la divergence relative  $d$ , donnée par :

$$d = \frac{\text{Max} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right]}{\text{Max} \left[ |\vec{v}| \right]}$$

où  $\text{Max} [ \dots ]$  représente la valeur maximale sur tous les points de grille. La saturation de  $d$  observée lorsque  $N > 60$  est due (Tric & Labrosse, 1999) à la dégradation induite par les erreurs d'arrondi sur les valeurs nodales.

$N$	30	40	50	60	80	100
$\delta\mathcal{E}_c$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$5.4 \cdot 10^{-11}$	$2.1 \cdot 10^{-12}$	$5.1 \cdot 10^{-13}$	
$\delta\mathcal{T}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$4.4 \cdot 10^{-11}$	
$\mathcal{C}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$5.0 \cdot 10^{-11}$	$9.1 \cdot 10^{-12}$	$5.5 \cdot 10^{-12}$
$d$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-6}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-6}$

TAB. 4.1 – Evolution des concentration moyenne ( $\mathcal{C}$ ) et divergence relative ( $d$ ), ainsi que des erreurs sur l'énergie cinétique globale ( $\delta\mathcal{E}_c$ ) et la température moyenne ( $\delta\mathcal{T}$ ), pour un écoulement stationnaire ( $Ra = 3000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$ ,  $\Psi = -0.2$ ,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ ) dans une cavité de rapport d'aspect  $\Gamma = R/h = 2$ , en fonction du nombre de modes employés dans les directions radiale ( $2N$ ) et verticale ( $N$ ).

$N$	$\omega$	$\delta\omega = \left  \frac{\omega(N) - \omega(N=80)}{\omega(N=80)} \right $
10	7.5043500237	$3.79 \cdot 10^{-3}$
15	7.5337603836	$1.18 \cdot 10^{-4}$
20	7.5329253779	$6.97 \cdot 10^{-6}$
30	7.5328727380	$1.46 \cdot 10^{-8}$
40	7.532872847925	$2.90 \cdot 10^{-11}$
50	7.532872847720	$1.75 \cdot 10^{-12}$
60	7.5328728477135	$8.89 \cdot 10^{-13}$
80	7.5328728477068	

TAB. 4.2 – Illustration de l'influence de la représentation spatiale sur la pulsation d'un écoulement monopériodique. Pour cet exemple  $\Gamma = R/h = 2$  et le nombre de mode suivant les directions  $r$  et  $z$  est respectivement  $2N$  et  $N$ . Les autres paramètres du système sont :  $Ra = 2600$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$ ,  $\Psi = -0.2$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

D'un point de vue pratique, on s'assurera systématiquement que les maillages utilisés sont tels que la divergence relative  $d$  n'excède pas  $10^{-4}$ .

En ce qui concerne l'influence de  $N$  sur la représentation des écoulements périodiques, on observe (tableau 4.2), à tous autres paramètres fixés, la convergence exponentielle vers la solution (attendue par l'emploi d'une méthode spectrale).

### Choix du pas de temps

Des évolutions typiques de la convergence de la pulsation d'états oscillants en fonction du pas de temps  $\delta t$  sont donnés dans le tableau 4.3.

En pratique, on réalise ce type d'étude sur quelques états oscillants d'une configuration donnée. A partir de ces résultats et du fait de considérer un écoulement comme suffisamment bien représenté lorsque  $\delta\omega$ , l'écart à la valeur "exacte", est inférieure à  $10^{-4}$ , on déduit le pas de temps  $\delta t$  à utiliser pour la suite des simulations.

$\delta t$	$\omega$	$\delta\omega$
$10^{-3}$	7.19187055	$4.70 \cdot 10^{-4}$
$8 \cdot 10^{-4}$	7.1931261770	$2.96 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-4}$	7.19445004596	$1.12 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^{-4}$	7.19497445281	$3.89 \cdot 10^{-5}$
$10^{-4}$	7.19522695680	$3.81 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-5}$	7.19524965021	$6.61 \cdot 10^{-7}$
$3 \cdot 10^{-5}$	7.19525440315	

$Ra = 15650$ ,  $\Gamma = \frac{R}{h} = \frac{1}{2}$ ,  
 $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$ ,  $\Psi = -0.2$ ,  
modes en  $(r \times z) : 50 \times 100$

$\delta t$	$\omega$	$\delta\omega$
$5 \cdot 10^{-3}$	7.5078	$3.38 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-3}$	7.5262726	$9.33 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-3}$	7.530796418	$3.32 \cdot 10^{-4}$
$10^{-3}$	7.532872847720	$5.66 \cdot 10^{-5}$
$5 \cdot 10^{-4}$	7.533227234063	$9.59 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-4}$	7.533280577359	$2.51 \cdot 10^{-6}$
$10^{-4}$	7.533299504778	

$Ra = 2600$ ,  $\Gamma = \frac{R}{h} = 2$ ,  
 $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$ ,  $\Psi = -0.2$ ,  
modes en  $(r \times z) : 100 \times 50$

TAB. 4.3 – Illustration de l’influence du pas de temps utilisé sur la pulsation de l’état oscillant. L’erreur  $\delta\omega$  est la variation relative entre la pulsation obtenue avec ce pas de temps et celle obtenue pour le plus petit  $\delta t$  utilisé.

$N$	30	40	50	60	80	100
temps CPU	15 mn	30 mn	1 h	1 h 45 mn	3 h 45 mn	7 h 15 mn

TAB. 4.4 – Temps CPU nécessaire pour réaliser  $10^4$  itérations temporelles en fonction du nombre de modes ( $2N$  et  $N$ ) utilisés (suivant  $r$  et  $z$ ) pour représenter un système pour lequel  $\Gamma = 2$ .

## Temps de calcul

De toute évidence, les différents critères que l’on s’impose sur les valeurs “acceptables” de la divergence relative, du maillage et du pas de temps, tout comme les contraintes sur les critères de stationnarité et de périodicité temporelle, sont issus du meilleur compromis possible entre précision du résultat et temps nécessaire pour calculer celui-ci.

Afin d’illustrer les temps de calcul nécessités, précisons que tous les résultats qui seront présentés par la suite ont été obtenus avec des maillages d’environ 5000 noeuds. Pour ces derniers, les moyens informatiques à disposition<sup>1</sup> permettent de réaliser environ 10000 itérations par heure CPU. A titre indicatif, des temps de calculs (principalement liés à la taille des matrices à manipuler, donc au nombres de modes représentant chacune des directions) pour divers maillages sont donnés dans le tableau 4.4.

## 4.5 Post-traitement des résultats

### 4.5.1 Portraits de phases

L’étude du comportement convectif du système nécessite l’inspection de l’évolution des quatre champs  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  dans l’intégralité de la cavité.

L’extension spatiale du système étant faible, les comportements de chacun des champs en un

<sup>1</sup>ORIGIN 2000 (SILICON GRAPHICS) du Centre de Ressources Informatique de l’Université Paris-Sud, munie de 8 processeurs R10000 à 195 Mhz et 1.2 Go de mémoire globale.

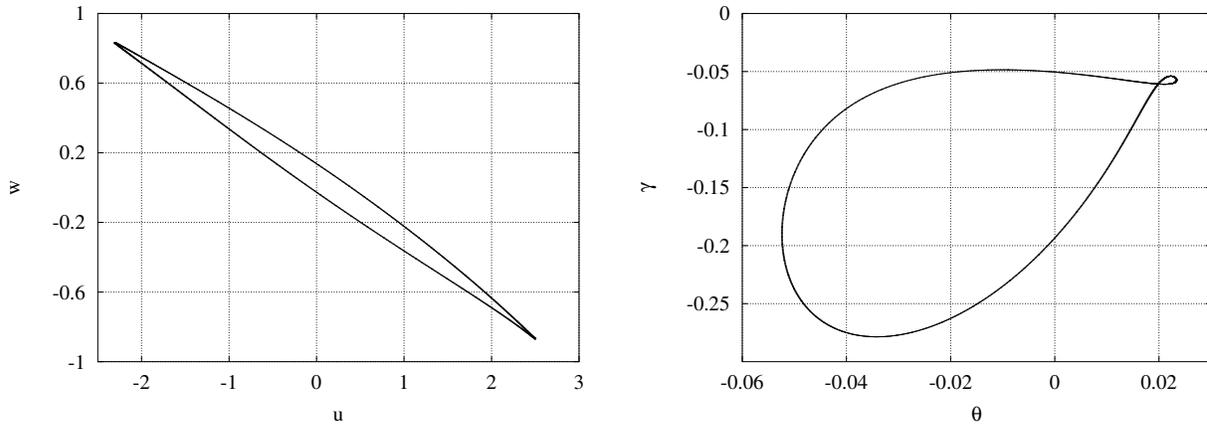


FIG. 4.1 – Exemples de portraits de phases d’un cycle limite. Les valeurs des champs  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  sont celles obtenues en un point donné de la cavité.

point<sup>2</sup> de la cavité ‘reflètent’ ceux que l’on trouverait en d’autres points de celle-ci.

En pratique, cela signifie que l’évolution des champs au cours du temps n’est conservée qu’en quelques points de la cavité. Les études et comparaisons des écoulements obtenus sous différentes conditions sont effectuées sur ces mêmes champs. En plus de pouvoir visualiser l’évolution d’un champ au cours du temps, on utilise aussi des portraits de phases qui sont des projections dans un plan décrit par deux des quatre champs. Dans ces plans, le temps est un paramètre. Ainsi, un état stationnaire y sera représenté par un point et un état transitoire par une trajectoire. Dans le cas d’un écoulement monopériodique, on obtiendra (figure 4.1) une courbe fermée, dit cycle limite.

#### 4.5.2 Eléments de théorie sur les bifurcations locales

Au cours des études des écoulements qui seront présentés par la suite, un certain nombre de bifurcations (perte de stabilité de l’état courant et par conséquent transition vers un autre régime stable) du système seront rencontrés.

Lorsque le passage d’une solution à l’autre (dû à un changement continu d’un paramètre  $\mu$ ) est continu, le système a subi une bifurcation locale. Il est alors possible de réaliser une analyse<sup>3</sup> (locale) des solutions au voisinage du point de bifurcation  $\mu = \mu_c$ . Les résultats généraux de telles analyses permettent de cataloguer les cas types qui peuvent se présenter. Cette section contient une description succincte de certains d’entre eux. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux multiples ouvrages abordant le sujet (par exemple Manneville, 1990; Ott, 1993; Glendinning, 1996).

Les bifurcations présentés dans les équations modèles qui suivent ont lieu lorsque le paramètre de contrôle associé (proportionnel à l’écart à la valeur seuil  $\mu - \mu_c$  du système non linéaire réel) change de signe.

<sup>2</sup>On prend de préférence un point ‘relativement quelconque’, c’est à dire qui ne se trouve ni trop près d’une paroi, ni sur un axe de symétrie du système.

<sup>3</sup>L’hypothèse de base pour obtenir ces résultats repose sur le fait d’utiliser un développement autour de la solution et au voisinage de la bifurcation qui suppose un écart infinitésimal à celles-ci.

## Bifurcation noeud-col

Le système suivant :

$$\frac{dX}{dt} = r_0 - X^2 \quad , \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ et } r_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad (4.9)$$

où  $r_0$  est le paramètre de contrôle, a pour solutions stationnaires (dits points fixes)  $X_{\pm} = \pm\sqrt{r_0}$  et décrit une bifurcation noeud-col : Les deux points fixes, le noeud (stable)  $X_+$  et le col (instable)  $X_-$  coalescent au point tournant ( $r_0 = 0$ ).

Le système analogue  $dX/dt = r_0 + X^2$  décrit le cas où les solutions n'existent que lorsque  $r_0 < 0$ .

## Bifurcation fourche

Le système suivant :

$$\frac{dX}{dt} = r_1 X - X^3 \quad , \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ et } r_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad (4.10)$$

où  $r_1$  est le paramètre de contrôle, décrit une bifurcation fourche super-critique et a pour points fixes  $X_0 = 0$  et  $X_{\pm} = \pm\sqrt{r_1}$ . Ces derniers sont stables tandis que la solution triviale ne l'est que pour  $r_1 < 0$ .

Le système analogue  $dX/dt = r_1 X + X^3$  décrit une bifurcation fourche sous-critique : Les points fixes  $X_{\pm} = \pm\sqrt{-r_1}$  sont instables.

## Bifurcation de Hopf

Les bifurcations précédentes sont relatives a des comportements limites indépendants du temps. L'apparition d'un comportement périodique est alors décrit par un système du type :

$$\frac{dZ}{dt} = r_1 Z - r_3 |Z|^2 Z \quad , \text{ avec } Z \in \mathbb{C} \text{ et } r_1, r_3 \in \mathbb{C} \quad , \quad (4.11)$$

Avec  $Z = R \exp(i\phi)$ ,  $r_1 = r_1^{(r)} + ir_1^{(i)}$ ,  $r_3 = r_3^{(r)} + ir_3^{(i)}$  et  $r_1^{(r)}$  étant ici le paramètre de contrôle. En séparant parties réelles et imaginaires, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \left( r_1^{(r)} - r_3^{(r)} R^2 \right) R \\ R \frac{d\phi}{dt} &= R \left( r_1^{(i)} - r_3^{(i)} R^2 \right) \end{aligned}$$

La solution triviale  $R = 0$  est stable pour  $r_1^{(r)} < 0$ . Pour  $R \neq 0$ , les solutions sont telles que les évolutions de  $R$  et  $\phi$  sont découplées puisque l'on obtient :

$$\frac{dR}{dt} = \left( r_1^{(r)} - r_3^{(r)} R^2 \right) R \quad (4.12)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = r_1^{(i)} - r_3^{(i)} R^2 \quad (4.13)$$

La résolution en  $R$  se ramène à l'étude d'une équation du type de celle du cas de la bifurcation fourche (équation 4.10). On montre que la bifurcation est super-critique (sous-critique) si  $r_3^{(r)} > 0$

( $r_3^{(r)} < 0$ ), auquel cas le point fixe  $R_+ = \sqrt{r_1^{(r)}/r_3^{(r)}}$  est stable (instable).

En régime asymptotique,  $t \rightarrow \infty$  et  $R(t) \rightarrow R_+$ . L'équation sur la phase  $\phi$  devient :

$$\frac{d\phi}{dt} = r_1^{(i)} - r_3^{(i)} R_+^2 ,$$

qui implique :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_0 + \left( r_1^{(i)} - r_1^{(r)} \frac{r_3^{(i)}}{r_3^{(r)}} \right) t \\ &= \phi_0 + \omega t \end{aligned}$$

C'est un état périodique dont la pulsation  $\omega$  est corrigée de la valeur originelle  $r_1^{(i)}$  par une contribution des non linéarités proportionnelle à l'écart au seuil  $r_1^{(r)}$ .

### 4.5.3 Comportements dynamiques au voisinage des bifurcations

Lorsque le système étudié subit une des bifurcations évoquées ci-dessus, son comportement dynamique sera dicté par celle-ci.

Ainsi, si le système subit une bifurcation fourche super-critique (c'est le cas pour l'état conducteur d'un fluide pur lorsque  $Ra$  dépasse la valeur seuil  $Ra_c$ ), alors sa dynamique asymptotique sera donnée par l'étude de l'évolution d'une perturbation (infinitésimale)  $\epsilon$  de l'équation d'une bifurcation fourche super-critique (équation 4.10). En prenant l'exemple de l'état conducteur (la solution  $X_0 = 0$ ) et une perturbation d'amplitude  $\epsilon \ll 1$  et  $r_1$  proportionnel à  $(Ra - Ra_c)$ , l'évolution de  $\epsilon$  sera au premier ordre donné par :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = r_1 \epsilon \Rightarrow \epsilon(t) = \epsilon_0 e^{r_1 t}$$

Le taux de croissance  $r_1 \propto (Ra - Ra_c)$  de la perturbation sera donc positif si  $Ra > Ra_c$  (la perturbation croît, l'état conducteur est instable) et négatif si  $Ra < Ra_c$  et le système relaxe (exponentiellement) vers l'état conducteur.

En pratique, il suffit donc d'évaluer les valeurs des taux de croissance ou relaxation  $\lambda$  du système réel pour diverse valeurs de  $Ra$  (suffisamment proches de  $Ra_c$ ). L'utilisation de la relation  $\lambda(Ra) \propto (Ra - Ra_c)$  permettant ensuite d'obtenir la valeur seuil avec une bonne précision.

On montre de même qu'à l'approche d'une bifurcation noeud-col, les taux de croissance des perturbations suivent la loi  $\lambda \propto \sqrt{Ra - Ra_{SN}}$ , où  $Ra_{SN}$  est la valeur de  $Ra$  à laquelle se trouve le point tournant.

Dans le cas d'écoulements périodiques, l'évolution près des bifurcations est plus commodément étudiée dans une section de Poincaré du cycle limite. Cette surface est arbitrairement<sup>4</sup> prise comme étant telle que la valeur de  $u$  s'annule en passant de valeurs négatives à positives. L'évolution des variables (discrètes)  $w_n, \theta_n, \gamma_n$  et  $\tau_n$  (temps de premier retour entre une intersection et la suivante),

---

<sup>4</sup>Le choix de la section de Poincaré utilisée n'a pas d'incidence dans la mesure où elle intersecte partout le champ de vecteur avec un angle fini (condition de transversalité).

proche des bifurcations et dans le cas de perturbations de faibles amplitudes, se ramène à celles décrites précédemment pour les cas stationnaires.

En pratique, on peut simplement étudier le régime transitoire naturel (issu par exemple d'un changement de paramètre du système) lorsque le régime asymptotique est presque atteint (pour rester dans la limite de faibles amplitudes), ce qui revient à avoir injecté une petite perturbation à la solution asymptotique et à étudier la manière dont elle relaxe.

#### 4.5.4 Bifurcations homocline et hétérocline

Comme nous venons de le voir, il est possible d'évaluer les comportements asymptotiques au voisinage des solutions d'un système non linéaire. L'aspect local de ces analyses ne permet cependant pas de capter les bifurcations globales.

A nouveau, il ne s'agit pas ici de discuter ni détailler tous les cas possibles, mais simplement de présenter quelques aspects en rapport avec les résultats qui seront présentés par la suite.

L'évolution du système, à partir d'une condition initiale donnée, dans l'espace des phases dépend des solutions du problème. Ceci implique en particulier que les propriétés de ces solutions (stables et instables) et ensembles particuliers associés (les variétés) posent des contraintes importantes sur l'aspect global de l'espace des phases, imposant par ce biais les propriétés qualitatives des trajectoires dans ce dernier.

Plus spécifiquement, les équations d'évolution linéarisées autour d'un point fixe définissent un opérateur tangent. Les vecteurs propres (et valeurs propres) du système tangent définissent les sous-espaces stables (valeurs propres négatives) et instables (valeurs propres positives) du point fixe considéré. Les variétés stables (instables) sont formées par l'ensemble des trajectoires tangentes au sous-espace stable (instable) lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Les variétés peuvent de plus être décomposées (on exclut ici les cas pathologiques) en sous-variétés unidimensionnelles (suivant un vecteur propre dont la valeur propre associée est réelle) ou bidimensionnelles (valeurs propres complexes conjuguées, l'évolution décrite dans la surface associée est en spirale).

Dans ce qui suit, on se limitera au cas où les variétés sont unidimensionnelles (et donc représentées par des trajectoires dans l'espace des phases).

En raison de la propriété d'unicité des trajectoires, les variétés (de même nature) de différents points fixes ne peuvent pas se couper<sup>5</sup>. Rien n'empêche cependant l'existence d'une trajectoire étant à la fois une variété instable issue d'un point fixe et une variété stable y menant. La boucle ainsi formée est dite homocline. De même, une variété instable d'un point fixe peut aboutir à un autre point fixe suivant une variété stable de ce dernier. Une trajectoire (boucle) reliant ainsi plusieurs points fixes est dite hétérocline.

Cette connexion entre variétés stables et instables peut, ainsi que l'illustre la figure 4.2, être à l'origine de la destruction (ou la génération, si la séquence est suivie dans l'ordre inverse de celle présenté dans la figure) d'un cycle limite. Précisons de plus qu'à la bifurcation, par opposition au cas d'un cycle limite issu d'une bifurcation de Hopf d'un point fixe (où l'état oscillant est de période

---

<sup>5</sup>Le point d'intersection aurait alors deux avenir et le système serait non déterministe.

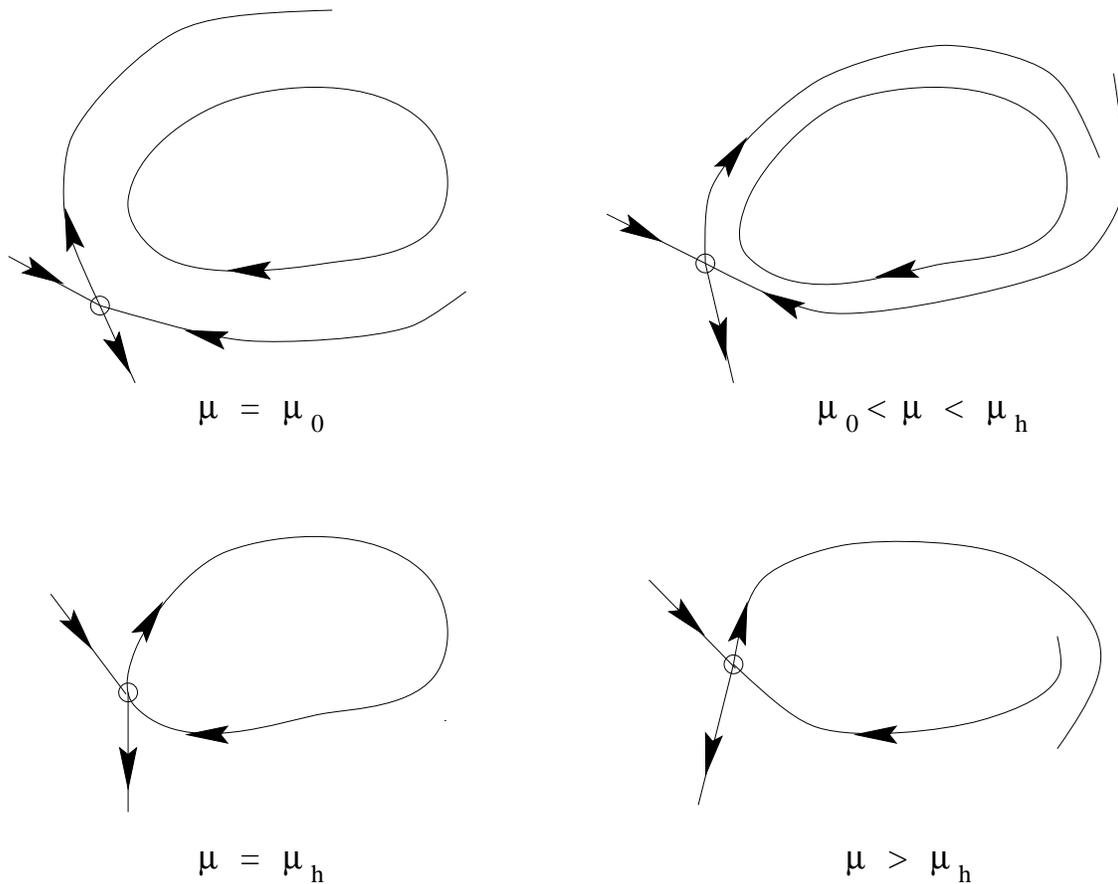


FIG. 4.2 – Exemple d’une bifurcation homocline. La bifurcation a lieu lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  est égal à  $\mu_h$ . Pour  $\mu < \mu_h$  deux solutions coexistent : un cycle limite stable et un point fixe instable. Lorsque  $\mu$  tend vers  $\mu_h$  par valeurs croissantes les deux se rapprochent. A la bifurcation, les variétés stables et instables du point fixe se confondent avec le cycle limite qui n’existe plus pour  $\mu > \mu_h$ .

finie et d’amplitude nulle), l’oscillation est d’amplitude finie et de période infinie. On montre de plus (Glendinning, 1996) que la période  $P$  du cycle limite, à l’approche de la bifurcation est telle que :

$$P \propto -\ln |\mu_h - \mu|$$

# Troisième partie

## Résultats

Cette dernière partie est consacrée à l'analyse des écoulements obtenus par simulation numérique de la convection d'un fluide binaire confiné dans un cylindre vertical.

Dans un premier chapitre, la géométrie du confinement et les propriétés du liquide binaire sont fixées. On procède alors à une étude complète des écoulements convectifs oscillants et stationnaires ainsi que des transitions qui font basculer le système d'un état à l'autre.

Une fois ces connaissances acquises, on s'intéresse, dans le deuxième chapitre, à l'influence du confinement sur les régimes convectifs en changeant les paramètres que sont le rapport d'aspect du cylindre et les conditions aux limites appliquées sur la paroi latérale de celui-ci. Les nombreuses différences et particularités induites par ses variations sur les états oscillants et leurs (multiples) bifurcations sont présentés. L'influence des propriétés du liquide binaire sur les états du système est ensuite abordée, à travers l'étude de quelques cas particuliers.

Le troisième chapitre présente une étude comparative entre les écoulements convectifs de fluides purs et de liquides binaires. On observe que les deux ne sont pas forcément équivalents à haut nombre de Rayleigh, contrairement à ce qui est couramment affirmé. On montre alors d'une part que l'origine de ces disparités est liée à la croissance d'une recirculation de fluide dans un "coin" de la cavité et d'autre part que l'évolution de cette structure est pilotée par les propriétés du fluide considéré.

# Chapitre 5

## Etude de la configuration $\Gamma = 2$

### 5.1 Introduction

Les résultats présentés dans ce chapitre sont exclusivement relatifs au cas d'une cavité cylindrique de rapport d'aspect  $\Gamma = 2$ . Les conditions aux limites sont telles que les parois sont prises comme étant rigides et imperméables. La configuration et les conditions aux limites associées sont rappelées dans la figure 5.1.

De même, les paramètres relatifs à la nature du mélange binaire considéré (les nombres de Prandtl  $Pr$  et de Lewis  $Le$ , ainsi que le paramètre de séparation  $\Psi$ ) sont fixés aux valeurs suivantes :

$$Pr = 1 \text{ , } Le = 10^{-1} \text{ et } \Psi = -0.2$$

Ces valeurs correspondent à celles d'un mélange  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  (voir tableau 2.1 page 18). L'étude du système se résume donc, dans un premier temps, à répertorier les états stables atteints suite aux variations du paramètre de contrôle (le nombre de Rayleigh  $Ra$ ). L'étude est ensuite complétée par l'analyse des écoulements obtenus et l'identification des bifurcations entraînant les transitions entre solutions.

#### 5.1.1 Obtention des états stables du système

Ainsi qu'exposé dans la partie précédente, le code numérique est basé sur l'intégration temporelle des équations régissant l'évolution du système à partir d'une condition initiale donnée.

En pratique, trois types de conditions initiales ont été utilisés :

1. Un état conductif ( $u = w = \theta = \gamma = 0$ ), auquel est ajouté une perturbation aléatoire, généralement de faible amplitude  $\mathcal{O}(10^{-2})$ .
2. Un écoulement résultant d'un calcul précédent, réalisé pour une autre valeur de  $Ra$  (ou de tout autre paramètre tel que  $Pr$ ,  $Le$ ,  $\Psi$ , voire de  $\Gamma$ ).
3. Un écoulement obtenu par un calcul précédent pour le même jeu de paramètre, mais fortement perturbé par un "décalage de grille" : Les valeurs initiales des champs  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  sont décalées de dix noeuds de maillage dans la direction radiale.

#### 5.1.2 Illustration d'un écoulement convectif

Cette section est consacrée à la présentation d'un exemple d'écoulement convectif stationnaire ; cette illustration permettant de fixer les idées sur les représentations, significations et propriétés

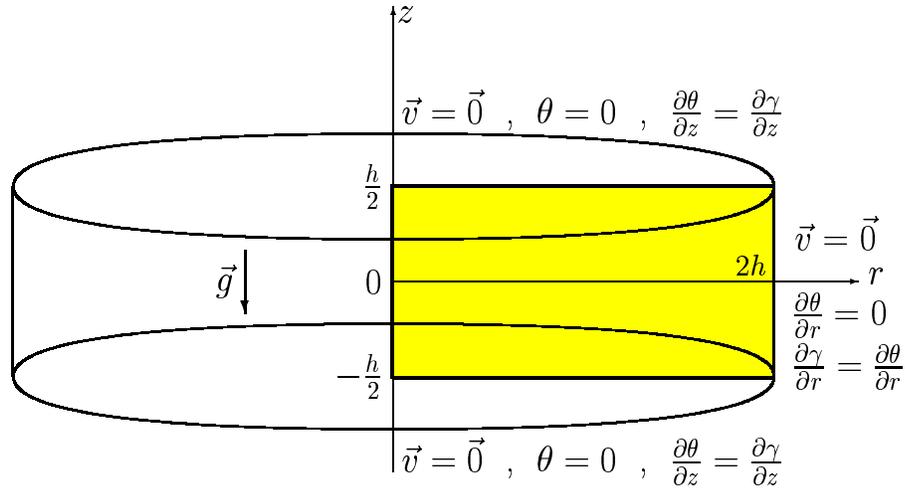


FIG. 5.1 – Illustration de la configuration géométrique et des conditions aux limites traitées dans ce chapitre.

essentielles des solutions qui seront discutées par la suite.

La figure 5.2 illustre le champ de vitesse et la fonction de courant  $\phi$  associée d'un régime convectif stationnaire obtenu pour  $Ra = 3000$ . L'écoulement est composé d'une paire de rouleaux contra-rotatifs. Le fait que les vitesses du rouleau le plus proche de l'axe du cylindre soient de plus grande amplitudes que celles du rouleau extérieur est dû à la géométrie cylindrique et à la différence de conditions aux limites sur l'axe et le périmètre de la cavité. On remarque de plus (ce qui restera vrai pour la grande majorité des états stationnaires rencontrés par la suite) que les rouleaux ne sont pas symétriques par rapport au plan médian  $z = 0$ .

Les distributions des champs de température  $T$  et de fraction massique  $C$  (c.à.d états conductifs inclus), sont donnés en figure 5.3. Les écarts aux solutions conductives  $\theta$  et  $\gamma$  sont données en figure 5.4. Ces figures illustrent les faits suivants :

1. Les fortes concentrations  $C$  se situent en bas de la cavité, dans les zones chaudes (ce qui est bien évidemment dû au paramètre de séparation  $\Psi$  négatif).
2. Le champ de température est déformé par l'écoulement.
3. La distribution de concentration dans la cavité est moins ample ( $C \in [-0.2 : 0.2]$ ) que celle de l'état conductif; la convection a tendance à homogénéiser le mélange binaire.

Pour conclure, rappelons l'existence de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$  évoquée dans la partie précédente (page 48) qui implique l'existence d'un deuxième écoulement stationnaire équivalent, composé lui aussi de deux rouleaux de rotation opposées et centrés sur des altitudes inverses<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>L'application de la symétrie  $\mathcal{M}$ , pour la fonction de courant  $\phi$  est donnée par la relation suivante :  $\phi_2(r, z, t) = -\phi_1(r, -z, t)$ .

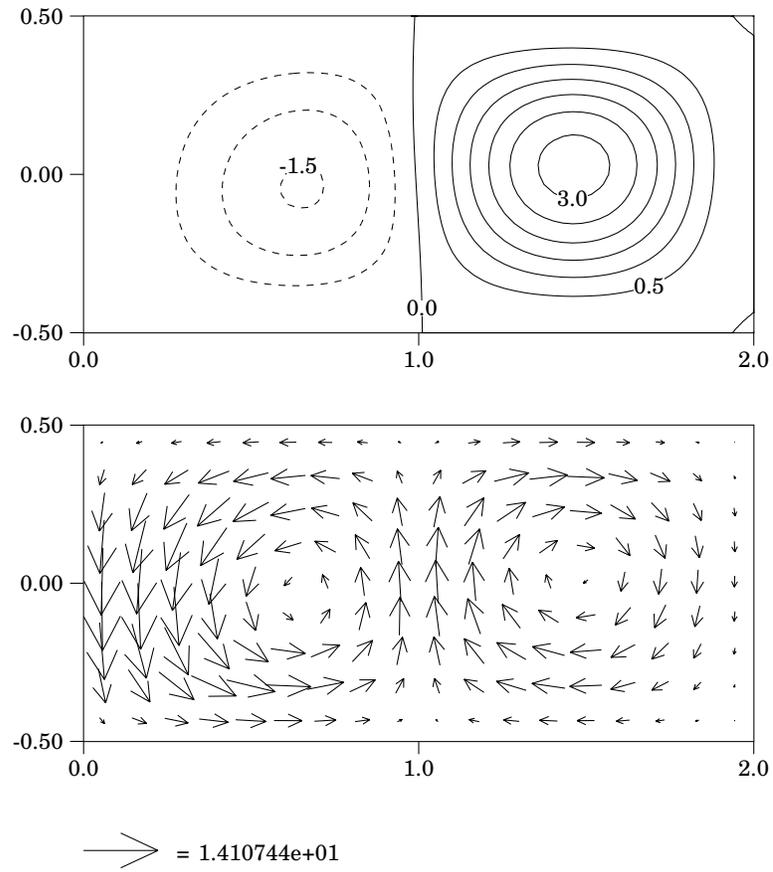


FIG. 5.2 – *Fonction de courant  $\phi$  et champ de vitesse  $\vec{v}$  d'un écoulement stationnaire ( $Ra = 3000$ ).*

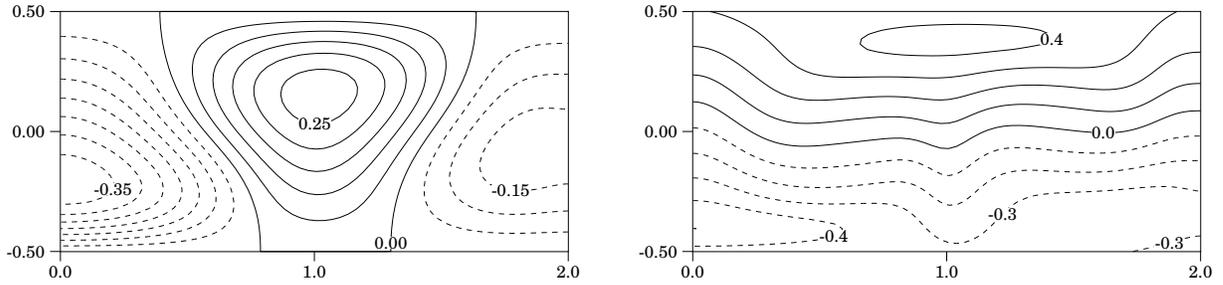


FIG. 5.3 – *Ecoulement stationnaire ( $Ra = 3000$ ). Gauche : Isovaleurs de la température  $T$ . Droite : Isovaleurs de la concentration  $C$ .*

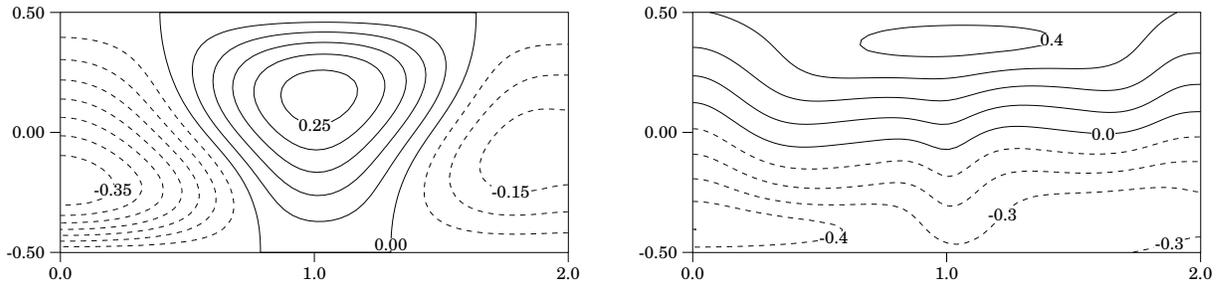


FIG. 5.4 – *Ecoulement stationnaire ( $Ra = 3000$ ). Gauche : Ecart au profil conductif de température  $\theta$ . Droite : Ecart au profil conductif de concentration  $\gamma$ .*

## 5.2 Analyse des états du système

La recherche des états stables du système a été conduite pour des valeurs de  $Ra$  allant jusqu'à 3000. D'une manière générale, le comportement du système est celui attendu (voir page 27) : La solution conductive devient instable via une bifurcation de Hopf sous-critique qui mène à un régime convectif oscillant. Ce dernier n'existe que sur un intervalle borné en  $Ra$  ; pour des valeurs plus importantes le régime convectif devient stationnaire.

L'analyse complète des états et transitions du système détaillée dans ce chapitre a donné lieu à la rédaction d'un article intitulé "The first nonlinear convective states and bifurcations of a confined binary liquid", soumis pour publication. Ce dernier est inclus dans les pages (70-102) suivantes.

### 5.2.1 Les branches de solutions et leurs valeurs seuils

Les domaines d'existence, en fonction de la valeur de  $Ra$ , des régimes conductif et convectifs (stationnaires et périodiques) sont présentés en figure 2, page 86. Il y a hystérésis entre ces trois états, ainsi que le montrent les flèches indiquant les transitions de l'un à l'autre.

Les bifurcations marquant les extrémités des domaines sur lesquels les états sont stables ont toutes été identifiées (à travers l'étude des taux de croissance déduits des évolutions asymptotiques du système, ainsi que présentée dans la partie précédente, page 58) et sont décrites dans les

paragraphes suivants.

### Les états oscillants

La branche d'états oscillants est atteinte lorsque l'état conductif devient instable, suite à une bifurcation de Hopf sous-critique, à  $Ra_{Hopf,1} = 2582.3 \pm 0.1$ , valeur obtenue par la mesure des taux de croissance de perturbations pour diverse valeurs de  $Ra$  et l'application de la relation  $\lambda(Ra) \propto (Ra - Ra_{Hopf,1})$  (figure 3, page 87). Une illustration de l'évolution des variables une fois le seuil franchit est donné en figure 4, page 88.

La branche des états oscillants peut être suivie, à  $Ra$  décroissants, jusqu'à  $Ra_{osc} \in [2573.25, 2573.5]$  où le système retombe dans l'état conductif. La recherche de la valeur de  $Ra_{osc}$  par l'étude des taux de croissance s'est révélée infructueuse au sens où un comportement en racine carré (représentatif de l'occurrence d'une bifurcation noeud-col) de ceux-ci à l'approche du seuil est bien observé, mais reste trop approximatif pour être utilisé pour en déduire une valeur plus précise du seuil.

On peut suivre la branche des états oscillants à  $Ra$  croissants jusqu'à  $Ra_{Hopf,2} = 2875.7 \pm 0.1$ . Avant de détailler cette deuxième bifurcation, précisons que tous les états oscillants sont monopériodiques et tels que leurs pulsations  $\omega$  (inférieures à celle de Hopf à la bifurcation de l'état conductif :  $\omega_{Hopf,1} = 9.123 \pm 0.001$ ) décroissent lorsque  $Ra$  croît, ainsi que l'illustre la figure 5, page 89.

A l'approche de  $Ra_{Hopf,2}$ , une deuxième oscillation (transitoire et exponentiellement décroissante) module l'oscillation principale. On étudie cette dernière en réalisant une coupe de Poincaré et en suivant l'évolution des premiers retours dans celle-ci. Ceci permet d'obtenir des résultats tels que celui présenté en figure 6 (page 90), où on voit l'amortissement de la deuxième fréquence au cours du temps (les suites de points  $\{w(n+1), w(n)\}$  spiralent vers un point fixe, représentatif du cycle limite de l'état monopériodique final).

Le comportement linéaire des taux de croissance (figure 7, page 91) du mode dominant suivant lequel se polarise l'évolution du système à l'approche de la valeur seuil  $Ra_{Hopf,2}$  achève de montrer qu'il s'agit bien d'une bifurcation de Hopf sous-critique du cycle limite. En d'autres termes, on est en présence d'une bifurcation de Hopf généralisée de l'état oscillant. La pulsation de la perturbation au seuil est  $\omega_{Hopf,2} = 0.61 \pm 0.01$ .

### Les états stationnaires

Une fois la valeur  $Ra_{Hopf,2}$  franchie, l'écoulement devient stationnaire. La branche des états stationnaires s'étend au delà de  $Ra = 3000$ , valeur maximale à laquelle ont été menées les simulations. Cette branche de solutions peut être parcourue vers des valeurs inférieures de  $Ra$ , jusqu'à  $Ra_{sta} = 2628.8 \pm 0.1$ , où elle se termine par une bifurcation noeud-col (l'évolution des taux de croissance à l'approche de celle-ci est donné en figure 8, page 92). En deçà de ce seuil, le système rejoint la branche des états oscillants.

## 5.2.2 Analyse détaillée des écoulements oscillants

Tous les états oscillants sont monopériodiques et possèdent la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  (définie et discutée page 48) reliant les valeurs des champs d'une demi-période à la sui-

vante. L'évolution des fonctions de courant (au cours d'une demi-période de l'oscillation) en bas ( $Ra = 2575$ ) et haut ( $Ra = 2870$ ) de la branche oscillante sont présentées en figure 10 et 11 (pages 94 et 95). L'évolution du système s'avère très différente d'un cas à l'autre : Pour  $Ra = 2575$ , les structures se déplacent essentiellement de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre tandis que pour  $Ra = 2870$  la propagation s'effectue dans le sens inverse.

Une autre façon de rendre compte du comportement oscillatoire dans la cavité est donné en figure 12, page 96. Il s'agit de la représentation des trajectoires suivies par des particules fluides (dont les positions initiales sont indiquées par les points) au cours de 10 périodes. Ces suivis de particules montrent que le trajet emprunté résulte d'une combinaison de deux comportements distincts : il y a d'une part des séries de va-et-vient autour d'une position moyenne qui d'autre part se propage dans la cavité. Ces deux types d'évolution temporelle sont en outre fortement réminiscents de ceux que l'on s'attendrait à observer dans des systèmes d'ondes stationnaires et propagatives.

Ainsi qu'évoqué dans la partie présentant celle-ci, la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  implique un découplage entre les parties paires et impaires (suivant la direction verticale) des champs et des fréquences (et harmoniques de celles-ci) composant le signal. Ceci est illustré en figure 13, page 97 ; La décomposition en modes Fourier  $C_k$  de l'oscillation  $\sum_{|k|=0,\infty} C_k(r, z)e^{ik\omega t}$  montre que les termes pairs et impairs sont parfaitement distribués sur les harmoniques impairs et pairs du signal. De plus, les amplitudes des modes sont très hiérarchisées, le mode fondamental étant fortement dominant. Ceci est vérifié en tout point de la cavité, ainsi qu'illustré par la figure 14, page 98.

Partant de ces constats, l'étude de l'essentiel du contenu ondulatoire du système peut se restreindre à celle du mode dominant. Son amplitude (complexe)  $C_1(r, z)$  peut être interprété comme étant :

$$C_1(r, z) = e^{i\Phi(r, z)} \equiv D_r(r, z) + iD_i(r, z)$$

et la phase  $\Phi$  est telle que

$$\tan[\Phi(r, z)] = \frac{D_i(r, z)}{D_r(r, z)}$$

Un système d'ondes stationnaires correspond au cas où  $\Phi$  est constant, tandis que  $\Phi = \vec{d} \cdot \vec{l}$ , avec  $\vec{l} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ , correspond à des ondes se propageant dans la direction  $\vec{d}$ . Les figures 15 et 16 (pages 99 et 100) montrent les valeurs de  $\Phi(r, z)$  obtenues (pour la variable  $w$ ) dans toute la cavité, aux deux extrémités de la branche oscillante. Etant donné que les variations de la phase  $\Phi$  sont bien plus importantes suivant  $r$  que suivant  $z$ , les ondes sont essentiellement radiales. Les valeurs de  $\Phi(r, z = 0)$  évaluées pour les autres champs ( $\theta$  et  $\gamma$ ) se comportent de même, ainsi que l'illustre la figure 17, page 101.

L'évolution de  $\tan[\Phi(r, z = 0)]$  pour  $w$  en fonction de  $Ra$  est donnée en figure 18, page 102. Le contenu ondulatoire du système s'avère être compartimenté sur plusieurs régions radiales :

- Sur  $r \in [0, 0.4]$  et  $[1.7, 2]$  les ondes sont de type stationnaires.
- Sur  $r \in [0.4, 1.7]$ , elles sont de type propagatives.

Les pentes de ces dernières, dans les cas extrêmes, montrent bien qu'il s'agit d'ondes se propageant de l'extérieur vers l'intérieur à haut  $Ra$  et inversement à bas  $Ra$ .

Une tentative de retrouver la dynamique des ondes observées au moyen d'un modèle simpliste de deux ondes contra-propagatives décalées en phase et en amplitude s'est révélée en fin de compte être

relativement infructueuse. Cette approche est détaillée dans l'article intitulé "Subcritical transition to quasi-traveling waves in binary fluid convection confined in a cylindrical container : Preliminary results" (publié dans la revue **Entropie**) joint en annexe (pages 218 à 222).

### 5.3 Synthèse des caractéristiques et propriétés du système

Les résultats obtenus dans le cadre de cette géométrie permettent de dégager certaines spécificités induites par la prise en compte d'un fort confinement latéral du système.

Comparativement aux résultats obtenus dans des systèmes de grande extension latérale, on observe ici les particularités suivantes :

1. La transition du régime convectif oscillant à l'état stationnaire résulte d'une bifurcation sous-critique de Hopf généralisée du cycle limite. Il y a en conséquence hystérésis entre les régimes convectifs oscillants et stationnaires. Cette bifurcation implique de plus une pulsation des oscillations non nulle à la transition, au contraire de celles des solutions d'ondes propagatives et stationnaires en systèmes infinis.
2. Les caractéristiques des états oscillants évoluent fortement en fonction de  $Ra$ . L'étude du contenu ondulatoire des solutions oscillantes montre que ces dernières peuvent être, dans une certaine mesure, vues comme résultant de combinaisons particulières d'ondes stationnaires et propagatives.

# The first nonlinear convective states and bifurcations of a confined binary liquid

E. Millour, E. Tric<sup>1</sup> and G. Labrosse

Université Paris-Sud,  
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur  
LIMSI-CNRS BP 133, 91403 ORSAY CEDEX, FRANCE.

## Abstract

The axisymmetric convective states of a binary liquid enclosed in a vertical cylinder of aspect ratio (radius over height)  $\Gamma = 2$  are numerically investigated. Solutions are obtained using a pseudo-spectral method to solve the set of Oberbeck-Boussinesq equations, Soret effect included. The ranges over which conductive, oscillatory and steady convective states exist are given. A description of each bifurcation leading to a transition from one branch of solutions to another is then given, followed by an analysis of the spatiotemporal behavior of the oscillatory solutions. In contrast to the travelling wave solutions that occur in laterally extended or unbounded layers, the oscillatory states that arise in the small container studied here display the following features: a) The oscillatory flows mainly consist of waveforms that propagate in the radial direction, either inwards or outwards; b) The branch of oscillatory solutions ends in a subcritical generalized Hopf (or Neimark-Sacker) bifurcation.

## 1 Introduction

Thermally driven motion in layers of two-component liquid mixtures is a topic that has stimulated numerous studies over the past decades. The straightforward problem of a binary liquid heated from below is indeed not only relevant to many natural and industrial systems but also an excellent illustration of the complex dynamics than can arise in nonlinear systems driven away from equilibrium. Early theoretical approaches of this problem [1, 2, 3] mainly dealt with doubly-diffusive systems in which a pair of independently diffusing species (usually heat and salt in the thermohaline problem) are considered. In these systems, vertical gradients of both species are externally imposed across the layer. In an alternative description of this problem,

---

<sup>1</sup>Present address: Université Nice Sophia Antipolis, Laboratoire Géosciences AZUR, 250 rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France.

binary liquid convection, only the temperature gradient is imposed and variations of solute mass fraction result from the coupling between heat and mass fluxes (the Soret effect) prescribed by the classical phenomenological laws of nonequilibrium thermodynamics. A thorough description of both approaches, along with a review of developments prior to the last two decades is given in [4]. The problem investigated in this paper, thermal convection of a binary liquid (Soret effect included) has since then led to an impressive number of studies, experimental, numerical and theoretical [5, 6, 7, 8] (and the many references given in the last two). Most of these works focus on the first convective states and transitions that occur in two-dimensional (2D) infinite or laterally extended layers.

The coupling between heat and mass fluxes due to the Soret effect implies that non-isothermal binary liquid mixtures cannot be homogeneous in composition. Consequently, both thermal and compositional buoyancies occur. The interplay between these can then trigger convective regimes that do not arise in pure liquids.

For a given configuration (i.e. fixed geometry and boundary conditions), the pure fluid system is entirely described by two parameters: the Prandtl  $Pr$  and Rayleigh  $Ra$  numbers. The first, being solely a function of the physical characteristics of the fluid dealt with, is set to and remains at a given value throughout experiments, whereas the second is proportional to the externally imposed temperature difference, which makes it the typical control parameter of the problem. When a binary liquid is considered, two additional parameters are required to complete the description of the problem: the Lewis number  $Le$  and the separation ratio  $\psi$ . The latter accounts for both the amplitude and the sign of the Soret coupling. The sign of  $\psi$  thus indicates if the compositional and thermal buoyancies cooperate ( $\psi > 0$ ) or compete ( $\psi < 0$ ).

When thermal and compositional buoyancies compete ( $\psi < 0$ ), the onset of convection is delayed, comparatively to the pure fluid ( $\psi = 0$ ) case. Moreover, the quiescent state typically turns unstable via a subcritical Hopf bifurcation that leads to oscillatory regimes, a feature specific to binary mixtures. In infinite layers, these oscillations are travelling waves [7, 8]. Surprisingly similar waveforms are observed in laterally extended systems. These waves can be interpreted as combinations of rightwards and leftwards travelling waves [5]. Time-dependent convective regimes exist over a limited range in  $Ra$  beyond which Steady Overturning Convection (SOC) occurs, via a transition which “has been described many times by experiments, by numerical simulation, but has also been the subject of a theoretical treatment” as pointed out in [9]. This experimental work however clearly shows that many

features of this transition remain to be clarified.

The richness of spatiotemporal phenomena that occur in 2D extended or infinite layers is such that to this day further investigations of these systems will prove useful before tackling the more realistic three-dimensional (3D) problem. A related topic that has so far attracted lesser research activity is that of systems of small lateral extension in which the nearby sidewalls can be expected to significantly alter the convective dynamics. The case of binary liquid convection in container of similar vertical and lateral extents has only been investigated, to the authors' knowledge, in cylindrical configurations, by both 3D numerical linear stability analyses of the quiescent state [10, 11] and a few experiments (using  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures) [12, 13]. The present contribution likewise tackles the case of binary liquid convection in a cylindrical enclosure of small lateral extent (the radius of the cylinder being set to twice its height). As in many of the aforementioned studies on 2D layers, only the simpler 2D problem is investigated here, for fixed values of  $\psi$ ,  $Pr$ ,  $Le$ . Direct numerical simulation of the problem leads to a thorough analysis (that completes the preliminary results given in [14, 15]) of the oscillatory and steady flows that arise as the control parameter  $Ra$  is varied.

The paper is organized as follows. Section 2 describes the studied system, the Soret effect, the set of balance equations that governs the evolution of the fields and the numerical tool used. The various states and bifurcations that lead to transitions from one solution to another are presented in Sec. 3. Illustrations of the convective flows are given in Sec. 4, followed by an analysis of the characteristics of the oscillatory solutions in Sec. 5.

## 2 Physical model and its mathematical formulation

A Newtonian binary liquid (of mean solute mass fraction  $C_0$ ) confined in a vertical cylindrical container of aspect ratio (radius  $R$  over height  $h$ )  $\Gamma = 2$  is considered. The horizontal plates of the apparatus are isothermal and maintained at different temperatures,  $T(r, z = \pm h/2) = T_0 \mp \Delta T/2$ , where  $\Delta T > 0$ . The lateral wall of the container is thermally insulated ( $\partial T/\partial r$  at  $r = \Gamma h$ ). All walls are rigid and impervious to matter: no-slip (null velocity  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) and no outwards mass flux ( $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , where  $\mathbf{J}$  is the mass flux and  $\hat{\mathbf{n}}$  a unit vector normal to the boundary) conditions are imposed at  $r = \Gamma h$  and  $z = \pm h/2$ .

Contributions of temperature and mass fraction gradients to the mass flux are given by the following phenomenological expression [4]:

$$\mathbf{J} = -\rho D (\nabla C + S_T \nabla T), \quad (1)$$

where  $\rho$  is the density,  $D$  the mass diffusivity and  $S_T$  the so-called Soret coefficient. Whereas thermodynamics impose that  $D$  be a positive quantity,  $S_T$  can be of either sign. Under more rigorous and general considerations, equation (1) includes a  $C(1-C)$  term that factors  $S_T$ , along with the fact that the Soret coefficient is a function of both temperature and mass fraction. It is here assumed, as is most often the case in studies on binary liquid convection, that temperature and mass fraction fluctuations about their mean value are small and that consequently  $C(1-C)S_T(T, C)$  can be identified to its mean value  $C_0(1-C_0)S_T(T_0, C_0)$ . The  $S_T$  coefficient in equation (1) is then a rescaled version of this last quantity.

The temperature difference  $\Delta T$  between bottom and top of the cylinder leads to a constant vertical thermal gradient in the quiescent state. The no outwards mass flux at the boundaries of the enclosure implies the rise of a mass fraction gradient scaled by  $\Delta C = -S_T \Delta T$ .  $S_T$  is typically quite small ( $\sim 10^{-3} K^{-1}$  [4, 16, 17]) and  $\Delta T$  is taken to be small enough in the forthcoming analysis to comply with the Oberbeck-Boussinesq approximations, where the density  $\rho$  of the mixture is given by the linear state equation:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0) + \alpha_C (C - C_0)], \quad (2)$$

where

$$\alpha_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad \text{and} \quad \alpha_C = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T}$$

respectively are the coefficients of thermal and compositional expansion.  $\alpha_T$  is positive and, as  $C$  refers to the mass fraction of the solute which is taken to be the heaviest component of the mixture, so is  $\alpha_C$ . A positive (negative) Soret coefficient therefore corresponds to the migration of the solute towards the cold (hot) part of the cavity, thus inducing a compositional buoyancy that cooperates (competes) with the thermal one.

Lengths are scaled with  $h$  and time with the vertical thermal diffusion time  $h^2/\kappa$ , where  $\kappa$  is the thermal diffusivity of the mixture. Velocity, pressure, temperature and mass fraction are respectively scaled with  $V = \kappa/h$ ,  $\rho_0 V^2$ ,  $\Delta T$  and  $\Delta C$ . The Oberbeck-Boussinesq set of equations describing the system is then:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Ra Pr (\theta + \Psi \gamma) \hat{\mathbf{z}} + Pr \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \theta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} + Le(\nabla^2 \gamma - \nabla^2 \theta), \quad (6)$$

where  $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{r}} + w\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$  and  $\hat{\mathbf{z}}$  being the radial and upward unit vectors,  $p$  denotes the dynamical pressure and  $\theta$  and  $\gamma$  respectively stand for the deviations from the conductive temperature and mass fraction profiles. The configuration and boundary conditions are given in Fig. 1. The four parameters that characterize the system are the Prandtl number  $Pr = \nu/\kappa$  (where  $\nu$  is the momentum diffusivity), the Lewis number  $Le = D/\kappa$ , the separation ratio  $\psi = -\alpha_C \Delta C / (\alpha_T \Delta T) = S_T \alpha_C / \alpha_T$  and the Rayleigh number  $Ra = \alpha_T \Delta T g h^3 / (\kappa \nu)$  ( $g$  being the gravitational acceleration).  $Ra$  is the control parameter of this study and the characteristics of the binary liquid are set to  $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$  and  $\psi = -0.2$ . These values are close to those of  $^4\text{He}$ - $^3\text{He}$  mixtures [12, 13]. The linear stability analysis [11] was performed in connection with these experiments and includes computations of the azimuthal wave number of the first unstable mode as a function of the separation ratio for a  $Pr = 0.755$ ,  $Le = 6.7 \cdot 10^{-2}$  mixture in a  $\Gamma = 2.76$  cylinder. This system is found to mainly select the  $m = 1$  azimuthal mode for  $-0.72 < \psi < -2.3 \cdot 10^{-3}$ , the axisymmetric ( $m = 0$ ) one being preferred only in the  $-1 < \psi < -0.72$  range. Whether these results can be used to tell if the system studied here is stable or not with respect to azimuthal perturbations is uncertain, mainly because of the following facts:

1. The linear analysis [11] clearly displays that the first few modes closest to criticality do not lie very far apart (corresponding threshold values are roughly within 5% or less of each other).
2. It is well known (see for instance [10]) that variations of  $\Gamma$  can significantly alter both ordering and threshold values of the various azimuthal modes.

The present work is focused on the investigation of the axisymmetric non-linear solutions of the system (for reasonably representative values of  $Pr$ ,  $Le$  and  $\psi$ ), leaving stability analyses thereof with respect to azimuthal perturbations, along with full three dimensional simulations to future inquiries.

The equations are solved with a Chebyshev collocation method for spatial integration (using Gauss-Radau and Gauss-Lobatto grids in the radial and axial directions). Time integration is achieved by a second-order finite-differences approximation (using a three-level scheme for time derivatives,

diffusion and advection terms respectively being evaluated implicitly and explicitly). Velocity and pressure fields are uncoupled and solved via specific projection-diffusion algorithm [18, 19]. All computations have been performed using a spatial resolution of  $160 \times 80$  nodes in  $r \times z$ . A time step of  $\delta t = 10^{-3}$  was used, which roughly corresponds to a thousandth of the period of the oscillatory solutions. The numerical accuracy of the results was checked by comparison with results computed with greater spatial and temporal resolutions. Solutions were taken to be stationary when the following criterion was fulfilled:

$$Max \left( \frac{|\phi_{n+1} - \phi_n|}{|\phi_n|} \right) < 10^{-4} \delta t,$$

where  $\phi_n$  stands for the value of any of the physical fields at time  $n\delta t$  and  $Max$  denotes the maximum evaluated over all fields and nodes. The oscillatory states were deemed to have been reached with the saturation of the first 8 significant digits of the instantaneous angular frequency (computed from the delay between successive ‘identical’ configurations). The last column of Table 1 gives examples of typical overall durations (in thermal time units) covered by computations.

### 3 Branches of solution and transition thresholds

The bifurcation diagram summarizing the ranges in  $Ra$  over which stable states exist is given in Fig. 2. The displayed amplitude is the value of  $w$  at a given node for stationary states (null or finite whether the quiescent state or SOC is depicted). The amplitude given for oscillatory solutions is the arithmetic mean of the minimum and maximum values of the oscillation. Transitions between the three branches of solutions are indicated by arrows. Solutions were reached using various initial conditions, consisting in most cases of results from previous runs to which a small or large amplitude perturbation could be added (see Table 1).

#### 3.1 Oscillatory states branch

As depicted by the bifurcation diagram in Fig. 2, oscillatory and conductive solutions coexist over a small range in  $Ra$ . The transition from the quiescent state to oscillatory convection occurs as the former turns unstable via a subcritical Hopf bifurcation. The growth rate  $\lambda(Ra)$  of small amplitude

oscillations about the rest state for  $Ra$  values close to the threshold are given in Fig. 3. The linear evolution of  $\lambda$  with  $Ra$ , expected in the vicinity of a Hopf bifurcation, shows that the transition (at which  $\lambda(Ra_{Hopf,1}) = 0$ ) occurs at  $Ra_{Hopf,1} = 2582.3 \pm 0.1$ .

Recall that in the pure fluid case, the quiescent state turns unstable via a supercritical pitchfork bifurcation leading to stationary convection. In the same configuration, the threshold values for that transition are [10]  $Ra_{p,2D} = 1850$  for the  $m = 0$  axisymmetric system and  $Ra_{p,3D} = 1830$  for the 3D one (where the  $m = 1$  azimuthal mode is the first to set in). As expected, the stabilizing Soret effect increases the threshold value of the quiescent state, by almost 40% in the present case. A similar rise was obtained by [7] albeit for a Cartesian (laterally periodic) system.

The transition from oscillatory convection back to the quiescent state occurs at  $Ra_{osc}$ , which lies between  $Ra = 2573$  and  $Ra = 2573.25$ . Extracting and inspecting the decay rates of small perturbations about the oscillatory solutions close to the threshold reveals a  $\lambda \propto \sqrt{Ra - Ra_{osc}}$  trend, which is expected in the vicinity of a saddle-node bifurcation. Using results from computations at  $Ra = 2573.25, 2573.5$  and  $2573.75$  does not lead to a better estimation of the threshold value than straightforward computations (see Table 1). The saddle-node nature of this bifurcation is hence only conjectured.

As mentioned in most studies, the frequency of the oscillations that grow from the quiescent state decrease from the initial (Hopf mode)  $\omega_{Hopf,1}$  value to a smaller level  $\omega$  as nonlinear saturation occurs. Figure 4 depicts such typical behavior. For infinite or very extended systems ([7, 9, 8] and references therein), a difference of about an order of magnitude between the Hopf frequency and that of the oscillatory solution at the same  $Ra$  value is commonly observed. The difference between the Hopf and final frequencies is much smaller in the present case:  $\omega_{Hopf,1} = 9.123 \pm 0.001$  while  $\omega \in [8.44; 4.62]$ , as depicted by the  $\omega(Ra)$  plot given in Fig. 5.

All the oscillatory states of the system are monophasic. The highest  $Ra$  value at which a stable oscillatory solution was reached is  $Ra = 2875$ . Taking the system even slightly beyond that value (see Table 1) triggers the transition to SOC.

The branch of oscillatory solutions terminates via a subcritical generalized Hopf bifurcation occurs. The transient modulation of the oscillations due to the secondary Hopf mode can easily be extracted from the asymptotic evolution of the flow towards its final monophasic state using a Poincaré section: The values of the fields were monitored at a given node and the

$u = 0$  plane chosen to be the Poincaré section. The successive values of  $w$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  at each impact of the transient trajectory with the section were then recorded. An example of a result obtained by this process is given in Fig. 6, where the values of  $w$  at the  $(n + 1)^{th}$  impact are plotted as a function of those at the  $n^{th}$  one. The  $\{w(n + 1), w(n)\}$  sets spiral in towards a final value ( $w(n + 1) = w(n) = 0.6841$ ) according to both the growth rate and frequency of the secondary Hopf mode. The evolution of the growth rates  $\lambda$  in the vicinity of the bifurcation is given in Fig. 7. Using the linear trend to extrapolate the  $Ra$  value at which the bifurcation occurs yields the threshold value of  $Ra_{Hopf,2} = 2875.7 \pm 0.1$ . At the bifurcation, the secondary Hopf frequency is  $\omega_{Hopf,2} = 0.61 \pm 0.01$ . If, starting from an initial oscillatory solution,  $Ra$  is increased (even slightly) beyond  $Ra_{Hopf,2}$ , the modulations are found to grow and eventually cast the system to the stationary states branch. This clearly shows that the generalized Hopf bifurcation that ends the oscillatory states branch is subcritical.

The transition to SOC in the system thus occurs as the oscillations reach a non-vanishing frequency. This behavior is in contradistinction to that observed in experiments with infinite systems (see for instance [7]) or extended ones [9], where the transition from travelling waves to SOC occurs with the frequency of the oscillations going to zero at the bifurcation. Our results confirm the comment made by [8] about the transition to SOC being “hysteretic with a jump in the frequency in finite experimental cells with rigid lateral boundaries”.

### 3.2 Stationary states branch

The stationary states branch can be reached using the (randomly perturbed) quiescent state as an initial condition only for  $Ra$  values roughly greater or equal to 2870 (see Table 1). Once reached, this branch of solutions can be followed at least up to  $Ra = 3000$ , the highest value at which computations were run. As depicted in Fig. 2 and mentioned in Table 1, steady convective states were obtained for decreasing  $Ra$  values, down to  $Ra = 2629$ . The branch ends slightly below that last value in a saddle-node bifurcation. The growth rate  $\lambda(Ra)$  of perturbations about the stationary solutions display (Fig. 8) the expected  $\lambda \propto \sqrt{Ra - Ra_{stat}}$  trend, yielding the threshold value  $Ra_{stat} = 2628.8 \pm 0.1$ . Decreasing  $Ra$  any further thus leads the system to the oscillatory branch which is the only stable solution for  $Ra \in ]Ra_{Hopf,1}, Ra_{stat}[$ .

It might be useful to also mention here that flows belonging to the beginning of the steady states branch can be destabilized by a rather specific large amplitude perturbation (described in the caption of Table 1) and brought to

the oscillatory branch.

## 4 Some illustrations of the convective flows

An illustration of a typical stationary convective flow is given in Fig. 9. The depicted streamfunction  $\phi$  contour lines show that this state mainly consists of a pair of counter-rotating rolls, the centermost being of slightly greater width and amplitude than the outermost. This discrepancy between inner and outer rolls is due to both the cylindrical geometry and the distinct kinematic conditions that must be fulfilled on the axis (axisymmetry) and the sidewall (no-slip).

Figures 10 and 11 respectively depict the oscillatory convective flows that occur in the vicinity of the lower and upper ends of the oscillatory branch. The series snapshots shown in these figures span half of a period  $\tau$  (due to the temporal symmetry of these solutions, see Sec. 5.1) of the oscillation and are unevenly distributed in time in order to display the short intervals over which structures evolve. Note that the overall propagation of patterns occurs in opposite directions from one case to the next: Motion is mainly outwards for oscillations at the lower end of the branch (such as the  $Ra = 2575$  flow shown in Fig. 10) and inwards for those at the upper end of the branch (the  $Ra = 2870$  flow displayed in Fig. 11).

A complementary description of behavior of the oscillatory solutions is given in Fig. 12 where the trajectories of a few particles over 10 periods is displayed. These particle paths combine back and forth motion roughly about a given position and a global drift in the enclosure.

## 5 Characterization of the oscillatory states

The physics of the system is completely described by the behaviors of  $\theta$ ,  $\gamma$  and  $w$ , as  $u$  is slaved to the latter in both space and time by the incompressibility constraint [Eq. (4)]. It is moreover found that the properties analyzed in this section are common to  $\theta$ ,  $\gamma$  and  $w$ . Results will thus, throughout most of the descriptions and illustrations that follow, refer to  $w$ .

## 5.1 Spatial and temporal properties

Since the oscillatory states are monop periodic solutions, the Fourier series representation:

$$\sum_{|k|=0,\infty} C_k(r, z)e^{ik\omega t}, \quad (7)$$

can be used to decompose the oscillations in terms of their mean value  $C_0$ , fundamental mode ( $k = 1$ ) and harmonics ( $|k| > 1$ ) thereof. In the results reported below, the amplitudes  $C_k$  were computed using a Fast Fourier Transform over either twenty or a single period whether signals at a few or all nodes of the domain were processed.

The oscillations can moreover also be decomposed in their  $z$ -wise even and odd parts by monitoring and combining evolutions at a pair of  $(r, \pm z)$  nodes. An illustration of the resulting spectrum (obtained for  $Ra = 2600$ ) is given in Fig. 13. As shown by this plot, the oscillations display the following essential features (which hold over the whole of the oscillatory domain):

- Even and odd multiples of the fundamental frequency are respectively odd and even in  $z$ .
- The fundamental  $C_1$  mode is strongly dominant (i.e. its amplitude is greater than those of its harmonics). This hierarchy in amplitude is moreover observed in the whole of the enclosure, as shown in Fig. 14.

The oscillatory flows thus mainly consist of their fundamental mode and their structure and properties strongly reminiscent of the Hopf mode ( $z$ -even in  $w$ ,  $\theta$  and  $\gamma$ ).

## 5.2 Characterization of the waves

In laterally unbounded layers (such as annular channels or models with periodic boundary conditions), oscillatory solutions typically take the form of travelling waves (TW). Depending on initial conditions, these patterns propagate either leftwards or rightwards. It is well known that a branch of standing wave (SW) solutions arises, along with the TW one, at the Hopf bifurcation of the quiescent state. These SW solutions, which are combinations of two TW propagating in opposite directions, are however generally unstable and thus not reached. Although pure travelling waves cannot by definition exist in bounded systems, analogous propagating waveforms are experimentally found to emerge in these: in the bulk of the container, these waves look like travelling waves. This feature has been investigated [5], using multiple scale

analysis, to theoretically model the dynamics of large aspect ratio systems near the onset of an oscillatory instability. This approach yields solutions that consist of a pair of TW (propagating in opposite directions), modulated over long spatial and temporal scales.

This section deals with the investigation of the essential properties of the waveforms that arise in the system and, to a lesser extent, qualifying these comparatively to minimal forms of pure travelling waves or combinations thereof (which includes standing waves resulting from the combination of two pure travelling ones).

As shown in sec. 5.1, oscillations mainly consist of a fundamental mode. Thus, only the behavior of the latter is considered in the following analysis. The complex amplitude  $C_1(r, z)$  can be rewritten as

$$C_1(r, z) = e^{i\Phi(r, z)} \equiv D_r(r, z) + iD_i(r, z), \quad (8)$$

the phase  $\Phi$  being such that

$$\tan[\Phi(r, z)] = \frac{D_i(r, z)}{D_r(r, z)}. \quad (9)$$

A standing wave corresponds to a constant phase  $\Phi$  in the whole of the enclosure, whereas  $\Phi = \mathbf{d} \cdot \mathbf{l}$ , where  $\mathbf{l} = r\hat{\mathbf{r}} + z\hat{\mathbf{z}}$ , depicts a wave propagating along  $\mathbf{d}$ . Figures 15 and 16 illustrate the phase  $\Phi(r, z)$  surfaces obtained for flows at both extremities of the oscillatory branch. These figures display a behavior common to oscillatory solutions at all values of  $Ra$ : variations of  $\Phi$  in the radial direction are significantly greater than those in the vertical one. Indeed, whereas  $\Phi$  ranges from 0 to  $2\pi$  along a radius, it evolves of at most 0.1 rad from the mid-plane ( $z = 0$ ) to  $z = \pm 0.4$  (see the cross sections given in the figures). Steeper evolutions of  $\Phi$  occur near the horizontal ( $z = \pm 0.5$ ) boundaries but are discarded in the present analysis.

Since these observations show that the waves are mainly radial, their study can be restricted to that of their evolution along a radius, namely at the mid-height ( $z = 0$ ) of the enclosure.

The phases  $\Phi(r, z = 0)$  for  $w$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  are given in Fig. 17. As mentioned in the beginning of this section, the behavior is similar for all fields and thus only  $w$  will be referred to in the following analysis.

The  $D_i(r, z = 0)/D_r(r, z = 0) = \tan[\Phi(r, z = 0)]$  quantity is given in Fig. 18, for the following set of values of  $Ra$ : 2574, 2583, 2600, 2700, 2825 and 2870. These plots show that:

- Near the axis,  $r \in [0, 0.4]$ , and the sidewall,  $r \in [1.7, 2]$ , variations of  $\Phi(r, z = 0)$  are small. Locally the behavior is thus analogous to that of a standing wave.
- In  $r \in [0.4, 1.7]$  the evolution of the phase depends strongly on both  $r$  and  $Ra$ .

A hypothetical pure travelling wave (of wavenumber  $k$ )  $A \cos(\omega t + \Phi(r))$ , where  $\Phi(r) = kr$ , would yield  $D_i/D_r = \tan[kr]$ . Comparing slopes of the phases obtained with this result indicates that propagation is outwards at the beginning of the oscillatory branch (Fig. 18a,b) and inwards at its end (Fig. 18e,f), which is consistent with the motion of the patterns displayed in Fig. 10 and 11. The phase shift  $\Phi_0 = \Phi(r = 2) - \Phi(r = 0)$  between the two standing waves' phases is respectively evaluated as very small and about 0.9 rad at the beginning and end of the oscillatory branch. So far, there is no available simple model that would be able to reproduce such results. Let us just mention here the most naive model, where a combination of two pure travelling waves (of wavenumber  $k$ ) is considered. Letting these waves be unbalanced in amplitude (by an  $\epsilon$  factor) and shifted in phase ( $\xi_+ - \xi_-$ ), leads to the simple expression

$$\mathcal{C}(r, z = 0) \propto Re \left[ e^{i(kr + \xi_+)} + (1 + \epsilon)e^{-i(kr + \xi_-)} \right]. \quad (10)$$

For given values of these parameters, phases that behave similarly to those obtained at the beginning of the oscillatory branch can be built [15].

## 6 Conclusion

The axisymmetric convective states of a binary liquid enclosed in a cylinder of aspect ratio 2 were investigated by direct numerical simulation. A description of the domains over which the various branches of solutions extend was given, along with a detailed analysis of the bifurcations leading to the termination of each of these branches. The transition from oscillatory convection to SOC was shown to be a subcritical generalized Hopf bifurcation, in contrast with the smoother supercritical scenario that is observed in infinite layers. An analysis of the main features of the behavior of the oscillatory states was then given, showing that these possess specific symmetry properties and consist of non-trivial radial waveforms that propagate either inwards or outwards.

## Acknowledgments

We gratefully acknowledge the Centre de Ressources Informatiques de l'Université Paris-Sud for granting us unbounded use of their computer facilities.

## References

- [1] G. Veronis, On finite amplitude instability in thermohaline convection, *J. Marine Res.* **23**, 1-17 (1965).
- [2] R. Sani, On finite amplitude roll-cell disturbances in a fluid layer subjected to both mass and enthalpy transfer, *Am. Inst. Chem. Engng J.* **11**, 971-980 (1965).
- [3] D. A. Nield, The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem, *J. Fluid Mech.* **29**, 545-558 (1967).
- [4] J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in liquids* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [5] M. C. Cross, Traveling and standing waves in binary-fluid mixture in finite geometries, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2935-3600 (1986).
- [6] K. Lerman, E. Bodenschatz, D. S. Cannel and G. Ahlers, Transient localized states in 2D binary liquid convection, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3572-3575 (1993)
- [7] W. Barten, M. Lücke, M. Kamps and R. Schmitz, Convection in binary fluid mixture. I. Extended traveling-wave and stationary states *Phys. Rev. E* **51**, 5636-5661 (1995).
- [8] M. Lücke, W. Barten, P. Büchel, C. Fütterer, C. Hollinger and C. Jung, in *Evolution of structures in dissipative continuous systems*, Lecture Notes in Physics (Springer), edited by F. H. Busse and S. C. Müller, 127-197 (1998).
- [9] H. Touiri, J.K. Platten and G. Chavepeyer, Effect of the separation ratio on the transition between travelling waves and steady convection in the two-component Rayleigh-Bénard problem, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **15(2)**, 241-257 (1996).
- [10] G. R. Hardin, R. L. Sani, D. Henry and B. Roux, Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with Soret effect. Part I: general theory and stationary stability results, *Int. J. Num. Meth. in Fluids* **10**, 79-117 (1990).
- [11] I. Mercader, M. Net and E. Knobloch, Binary fluid convection in a cylinder, *Phys. Rev. E* **51**, 339-351 (1995).

- [12] M. S. Thurlow, B. J. Brooks, P. G. L. Lucas, M. R. Ardron, J. K. Bhattacharjee and A. L. Woodcraft, Convective instability in rotating liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures, *J. Fluid Mech.* **313**, 381-407 (1996).
- [13] R. B. Behringer, Rayleigh-Bénard convection and turbulence in liquid helium, *Rev. Mod. Phys.* **57**(3), 657-687 (1985).
- [14] E. Delouche, G. Labrosse and E. Tric, The oscillatory 2D convective states of a binary fluid confined in small cavity, *J. Phys. III* **6**, 1527-1534 (1996).
- [15] E. Millour, E. Delouche, E. Tric and G. Labrosse, Subcritical transition to quasi-traveling waves in binary fluid convection in a cylindrical container : preliminary results, *Entropie* **35**(218), 30-34 (1999).
- [16] R.S Schechter, I. Prigogine and J.R. Hamm, Thermal diffusion and convective stability, *Phys. Fluids* **15**(3), 379-386 (1972).
- [17] P. Kolodner, H. Williams and C. Moe, Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions, *J. Chem. Phys.* **88**(10), 6512-6524 (1988).
- [18] A. Batoul, H. Kallouf and G. Labrosse, Une méthode de résolution directe (pseudospectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée, *C. R. Acad. Sci. Paris* **319**, 1455-1461 (1994).
- [19] G. Labrosse, E. Tric, H. Kallouf and M. Betrouni, A direct (pseudospectral) solver of the 2D/3D Stokes problem: transition to unsteadiness of natural-convection flow in a differentially heated cubical cavity, *Num. Heat Transfer B* **31**, 261-276 (1997).

Initial condition	$Ra$ value	Final state	Overall observation
cond + rand $O(10^{-2})$	2550	cond	100
cond + rand $O(10^0)$	2560	cond	100
$Ra = 2580$ (osc)	2573	cond	800
$Ra = 2575$ (osc)	2574	osc	600
cond + rand $O(10^{-2})$	2575	cond	100
cond + rand $O(10^0)$	2575	osc	150
cond + rand $O(10^{-2})$	2582	cond	100
cond + rand $O(10^{-2})$	2585	osc	640
$Ra = 2630$ (sta)	2628	osc	50
$Ra = 2630$ (sta)	2629	sta	172
$Ra = 2650$ (osc)	2675	osc	50
cond + rand $O(10^{-2})$	2725	osc	40
cond + rand $O(10^{-2})$	2775	osc	30
cond + rand $O(10^{-2})$	2850	osc	60
$Ra = 2850$ (sta)#	2850	osc	20
$Ra = 2870$ (sta)	2850	sta	10
cond + rand $O(10^{-2})$	2867	osc	290
$Ra = 2867$ (sta)#	2867	osc	100
cond + rand $O(10^{-2})$	2870	sta	12
$Ra = 2865$ (osc)	2870	osc	305
$Ra = 2870$ (sta)#	2870	sta	110
cond + rand $O(10^{-2})$	2875	sta	50
$Ra = 2870$ (osc)	2875	osc	1450
$Ra = 2875$ (sta)#	2875	sta	50
cond + rand $O(10^{-2})$	2876	sta	30
$Ra = 2875$ (osc)	2876	sta	50
$Ra = 2875$ (osc)	2880	sta	30
$Ra = 2850$ (osc)	2900	sta	35
cond + rand $O(10^{-2})$	3000	sta	16

Table 1: Examples of the overall duration (in thermal time) covered by computations. Initial conditions consist of either a random perturbation (of small  $|rand(r, z)| = 10^{-2}$  or large 1 amplitude) of the conductive (cond) fields or an oscillatory (osc) or stationary (sta) flow obtained by a previous run. The # symbol indicates that the initial conditions were strongly perturbed by an outwards shift of ten radial nodes of all data values.

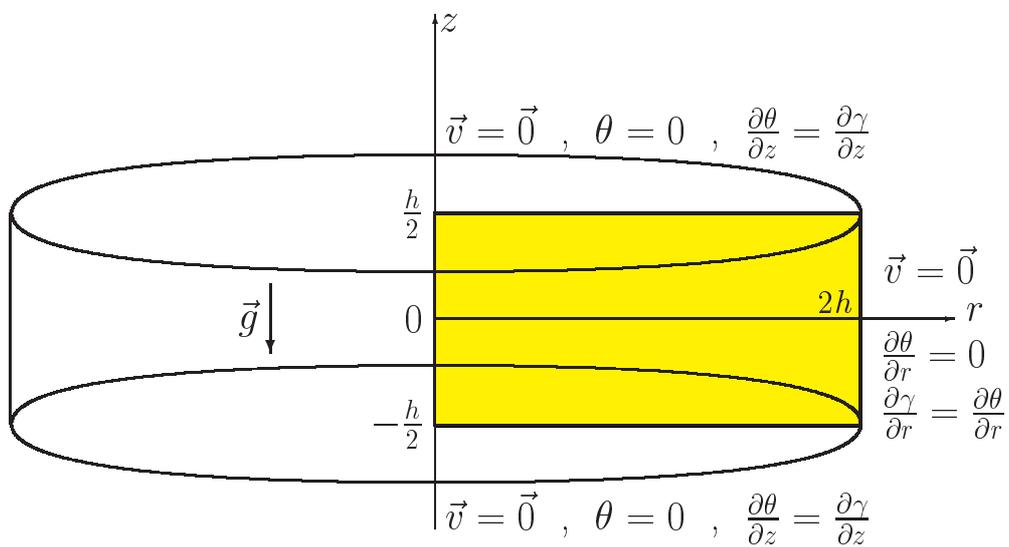


Figure 1: Geometry and boundary conditions of the problem.  $\theta$  and  $\gamma$  are the deviations from the conductive temperature and mass fraction profiles.

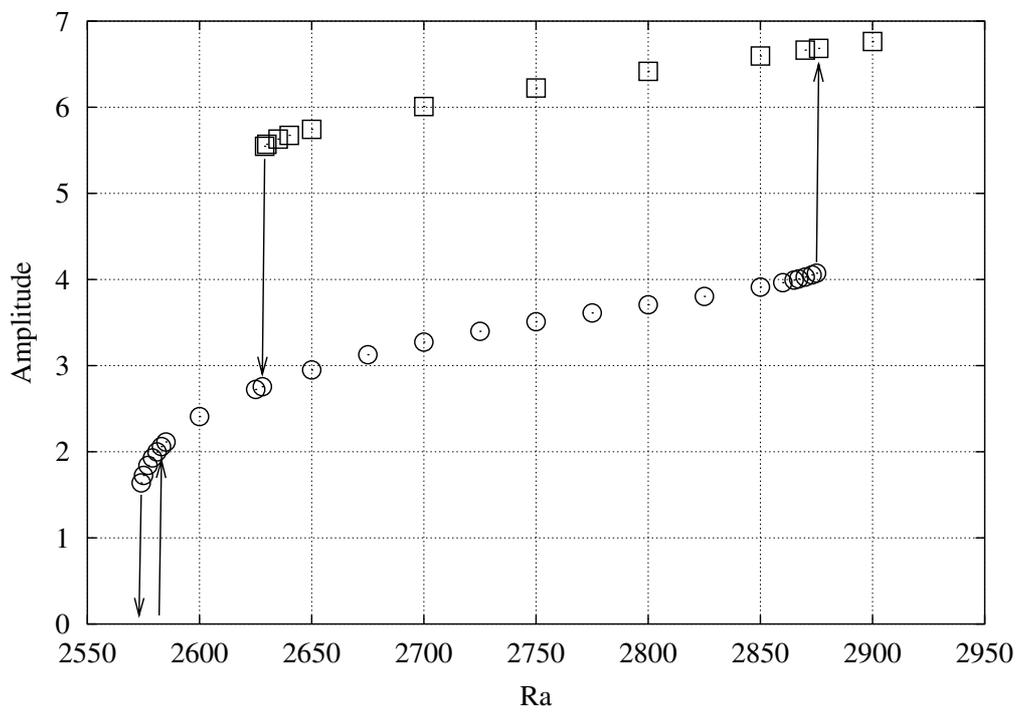


Figure 2: Amplitude of the vertical velocity  $w$  at a given position in the enclosure. Squares and circles respectively denote stationary and oscillatory regimes. Arrows indicate transitions from one state to another.

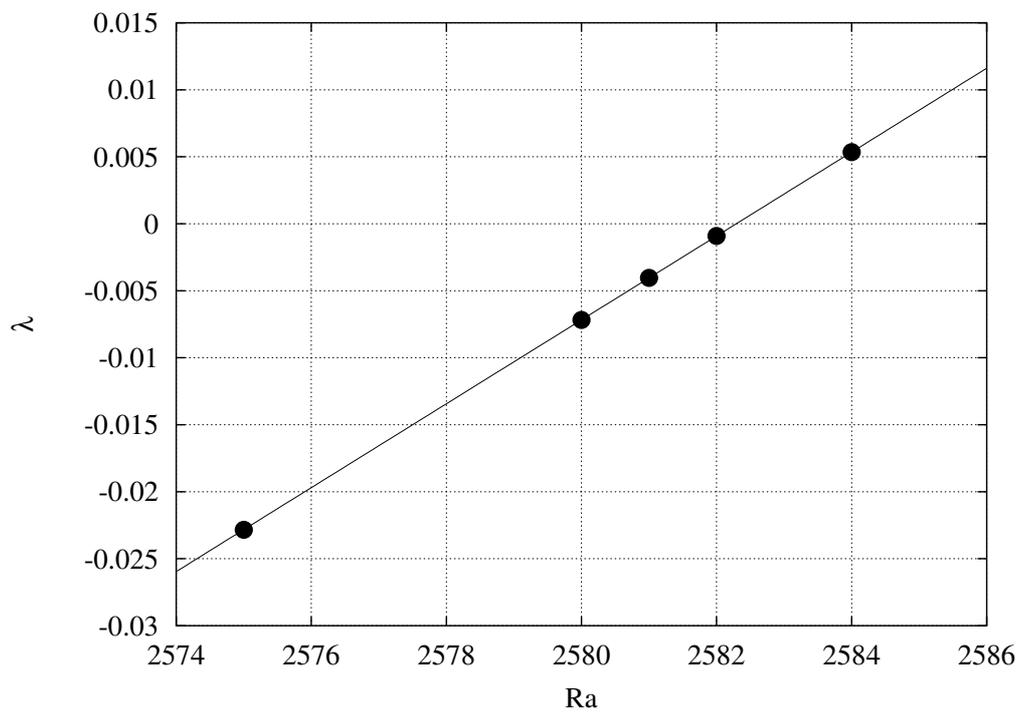


Figure 3: Temporal growth rate  $\lambda$  of an infinitesimal perturbation of the conductive state as a function of the Rayleigh number in the vicinity of the Hopf bifurcation. The solid line is not a linear fit of the data but merely obtained using the linear law given by the two points that lie closest to vanishing growth rate.

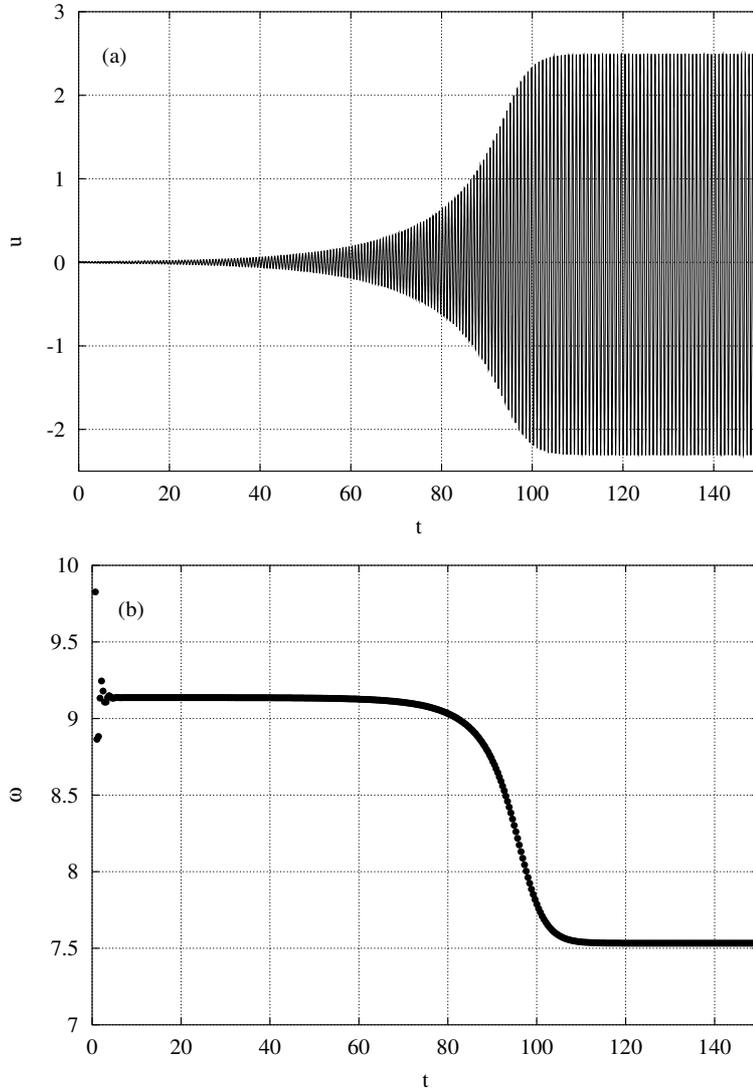


Figure 4: (a) Evolution of the radial velocity at a given node and (b) of the corresponding instantaneous angular frequency, for  $Ra = 2600$ : At time  $t = 0$ , the conductive state is perturbed by an  $O(10^{-2})$  random amplitude. All frequencies rapidly decay ( $t \in ]0, 5]$ ), except the one linked to the (linear) Hopf mode. At  $t \simeq 70$ , the nonlinear terms are no longer negligible, leading to an established periodic state, settling ( $t > 120$ ) at a frequency lower than the Hopf one.

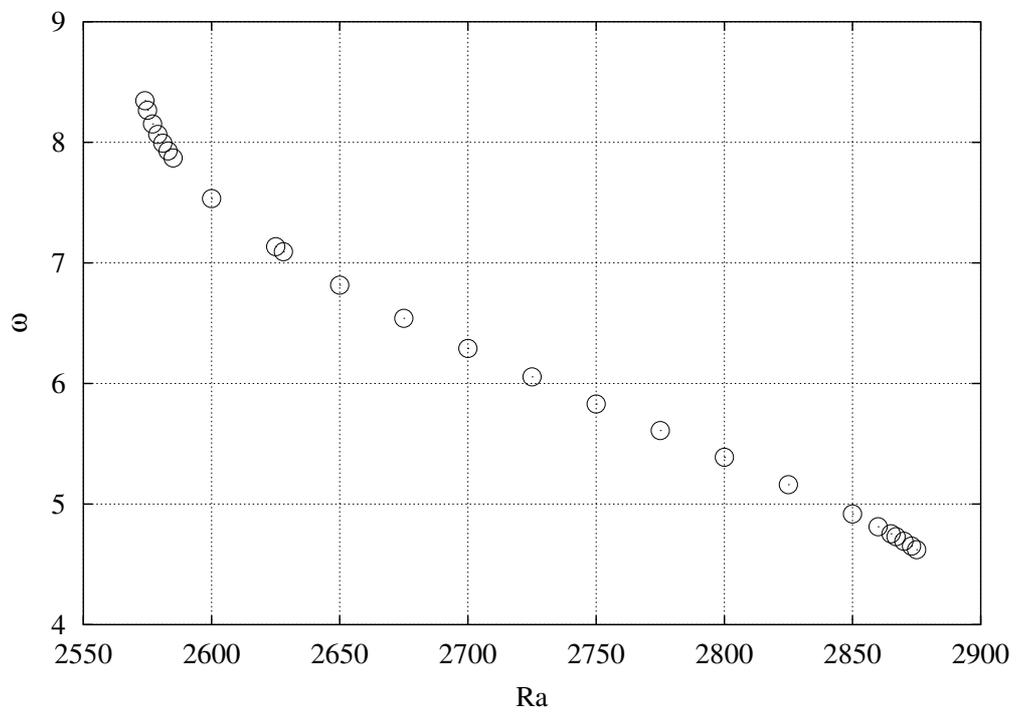


Figure 5: Angular frequency of the oscillatory states.

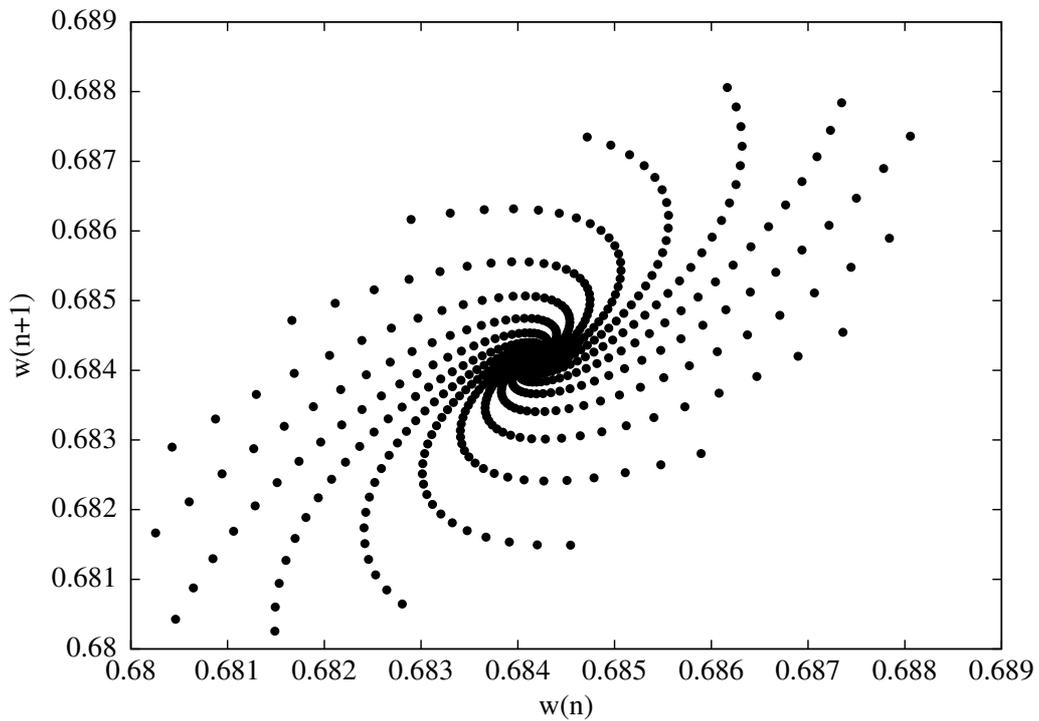


Figure 6: Embedding of the successive values of the vertical velocity  $w$  in the Poincaré section, depicting the transient modulation of the periodic state (here, the  $Ra = 2875$  flow) by the secondary Hopf mode.  $w(n)$  is the value at the  $n$ th impact. As time (and therefore  $n$ ) increases, the  $\{w(n+1), w(n)\}$  sets spiral in toward their final value,  $w(n+1) = w(n) = 0.6841$ .

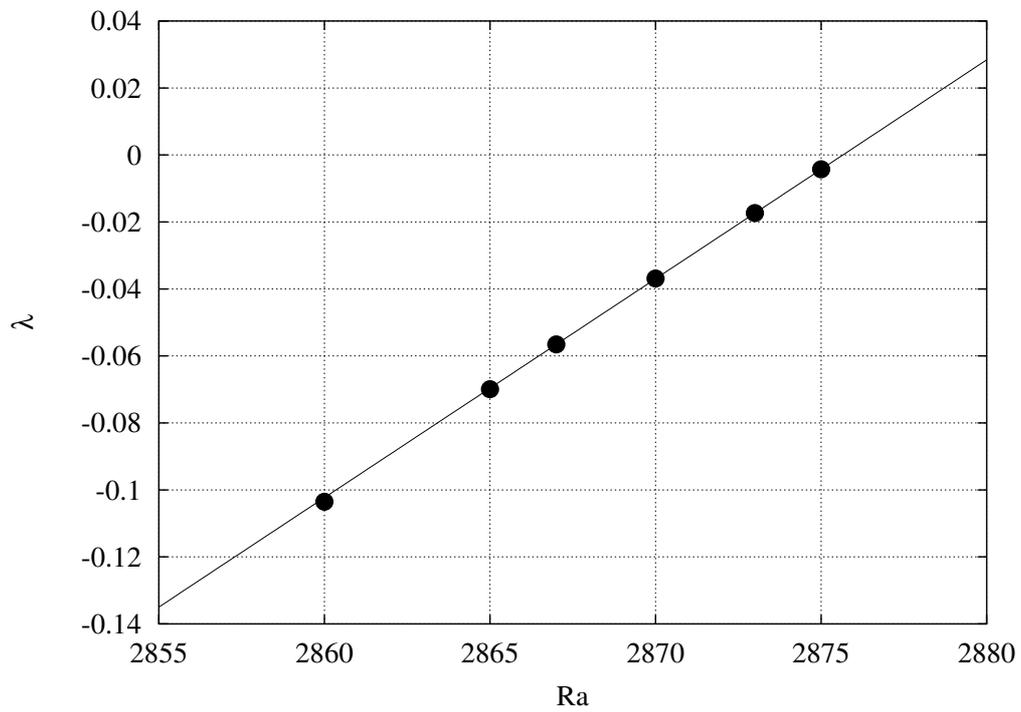


Figure 7: Temporal growth rates  $\lambda$  of the modulation of the periodic state as a function of the Rayleigh number, close to the generalized Hopf bifurcation (as in Fig. 3, the solid line is obtained using the linear law given by the two points that lie closest to vanishing growth rate).

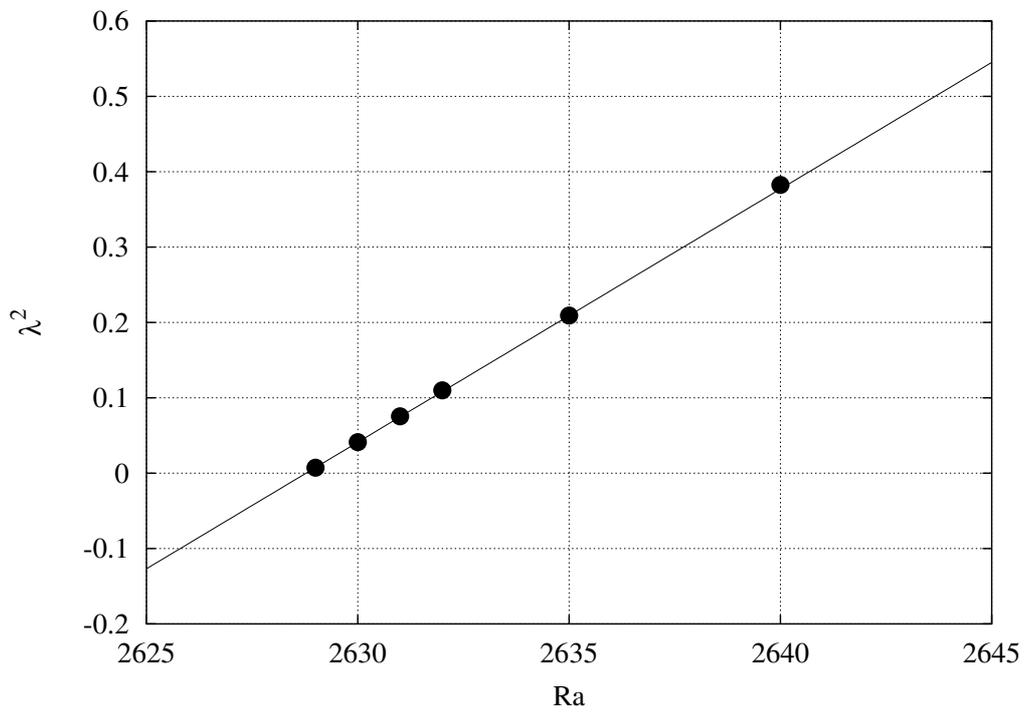


Figure 8: Squared temporal growth rates  $\lambda$  of the stationary state close to the saddle-node bifurcation (as in Fig. 3 and 7, the solid line is obtained using the linear law given by the two points that lie closest to vanishing growth rate).

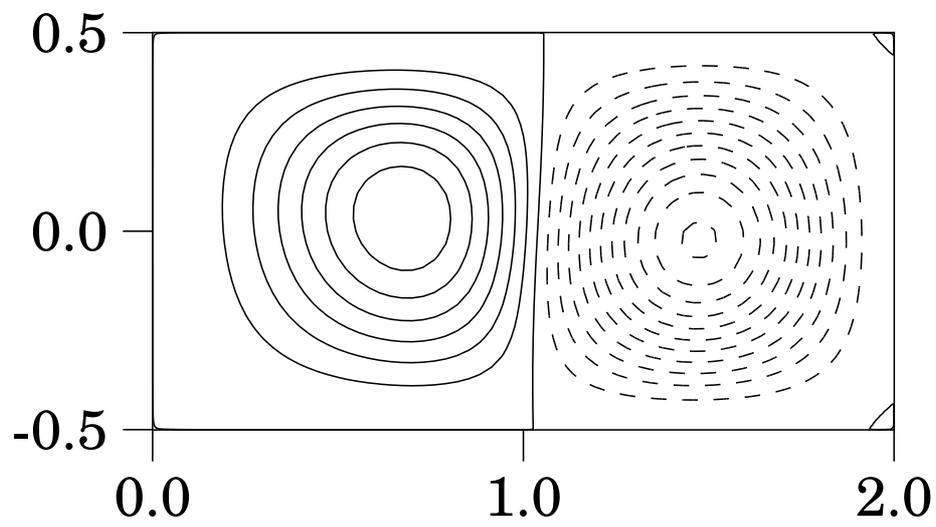


Figure 9: Streamfunction  $\phi$  contours of the stationary flow obtained at  $Ra = 2700$ . Solid and dashed lines respectively refer to positive and negative values (clockwise and anti-clockwise motion); Displayed contours levels range from  $\phi_{min} = -2.2$  to  $\phi_{max} = 1.4$  with steps  $\delta\phi$  of 0.2.

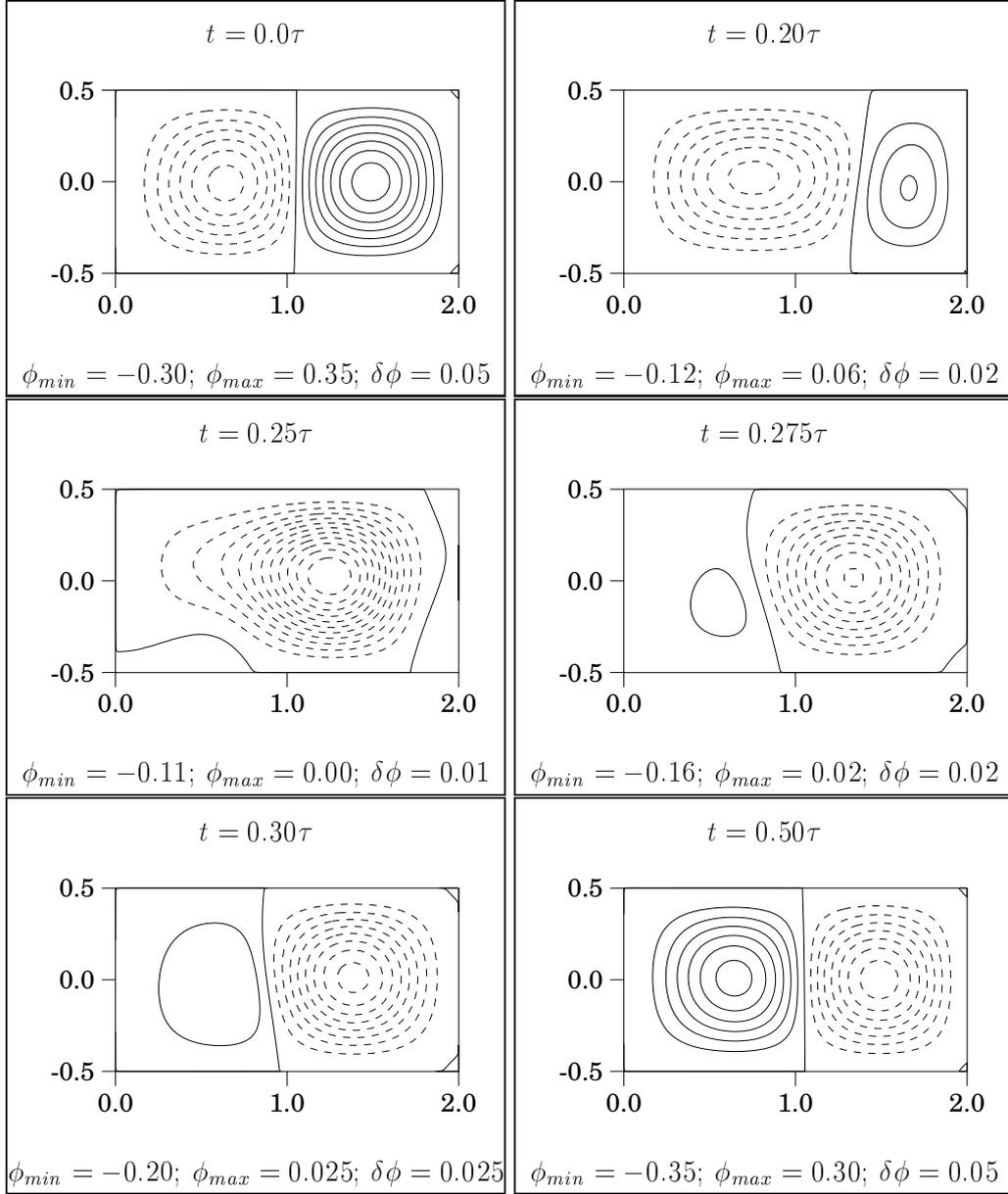


Figure 10: Streamfunction  $\phi$  contours of the  $Ra = 2575$  oscillatory flow over the first half of a period  $\tau$ . The symmetry of this state is such that for  $t \in [\frac{\tau}{2}, \tau]$ ,  $\phi(r, z, t) = -\phi(r, -z, t - \frac{\tau}{2})$ .

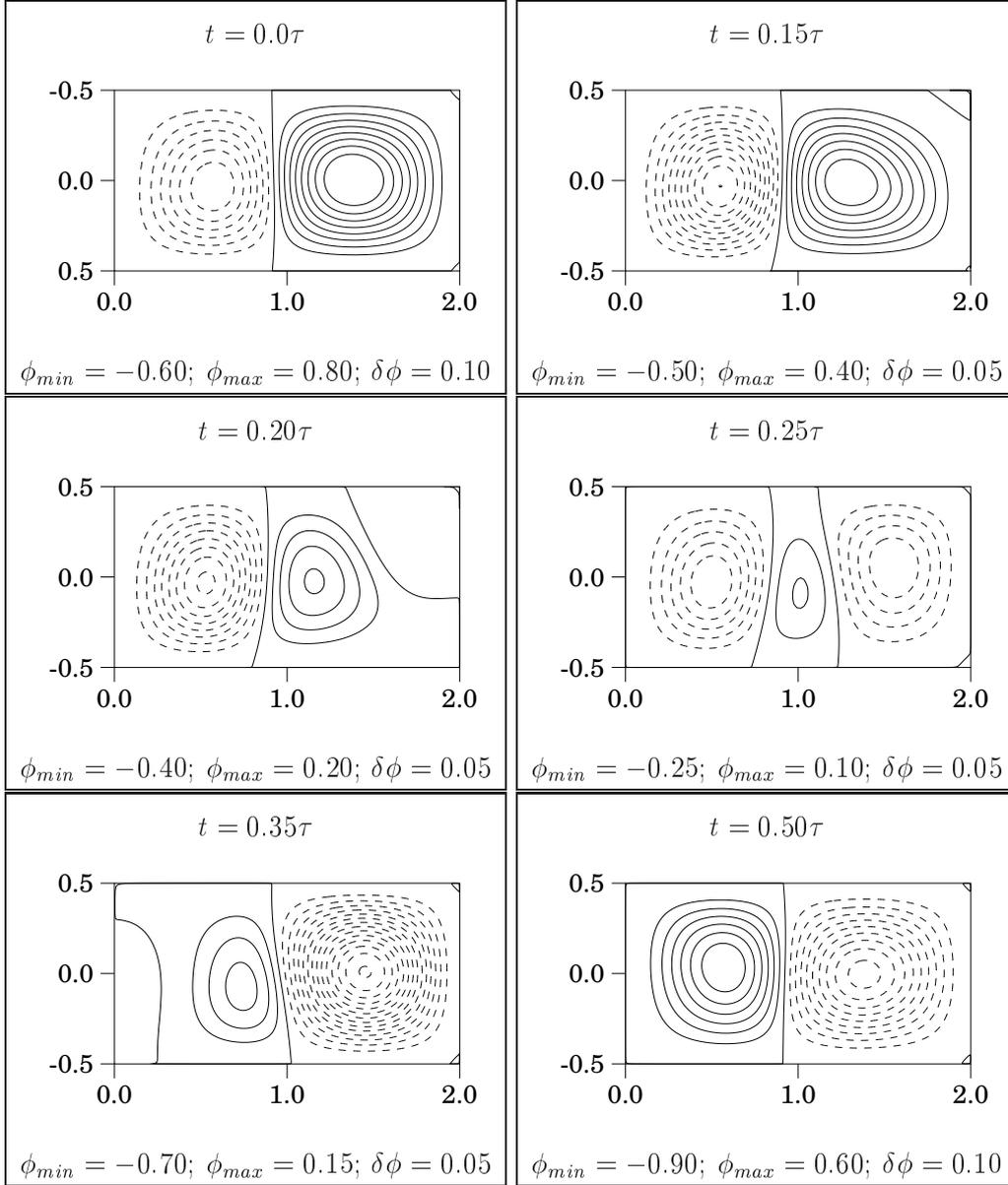


Figure 11: Streamfunction  $\phi$  contours of the  $Ra = 2870$  oscillatory flow over the first half of a period  $\tau$ . The symmetry of this state is such that for  $t \in [\frac{\tau}{2}, \tau]$ ,  $\phi(r, z, t) = -\phi(r, -z, t - \frac{\tau}{2})$ .

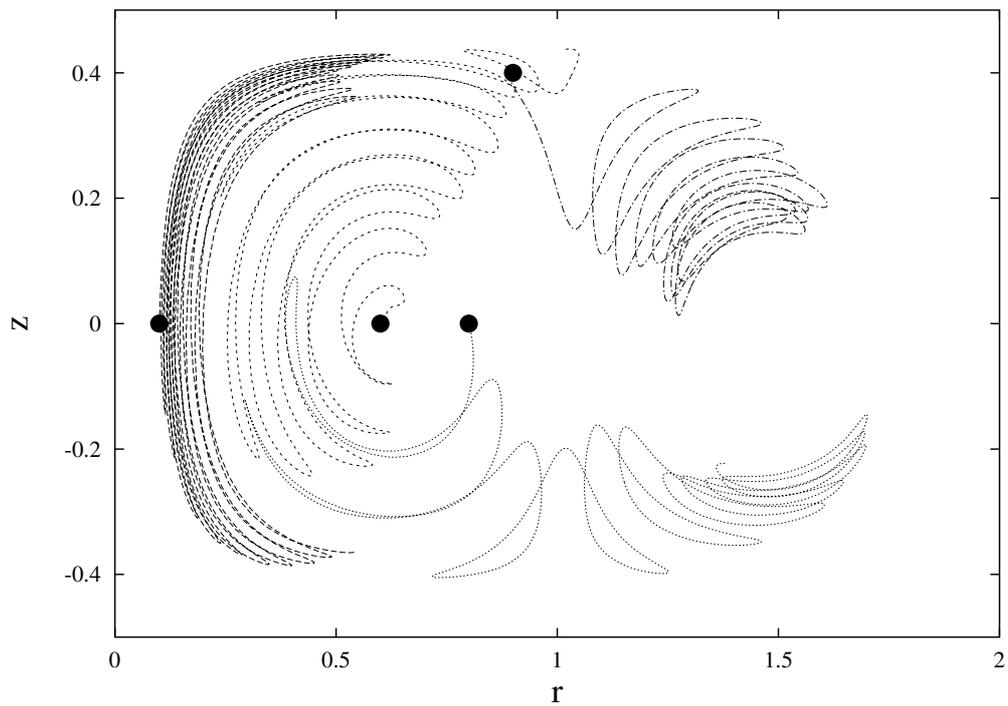


Figure 12: Trajectories of four fluid particles in the  $Ra = 2600$  oscillatory flow over 10 periods. The initial positions of the particles are denoted by solid dots and correspond to the following sets of  $(r, z) \in ([0, 2], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  coordinates:  $(0.1, 0.0)$ ,  $(0.6, 0.0)$ ,  $(0.8, 0.0)$ , and  $(0.9, 0.4)$ .

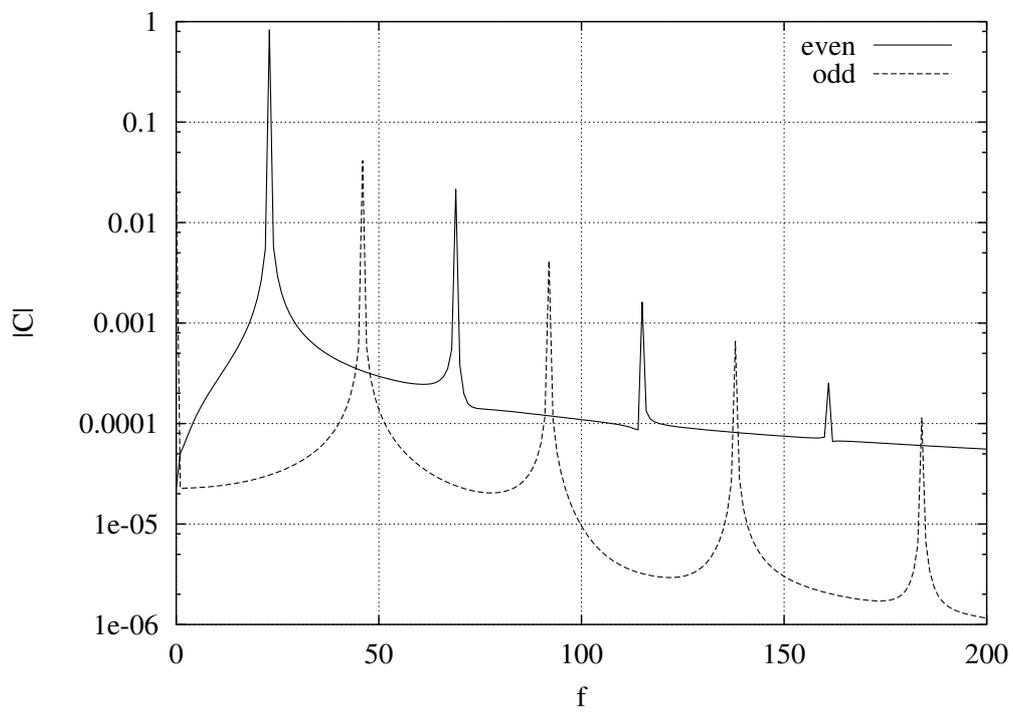


Figure 13: FFT of the  $z$ -even and odd parts of  $w$ . The  $z$ -wise decomposition was achieved using values recorded at two  $(r, \pm z)$  nodes.

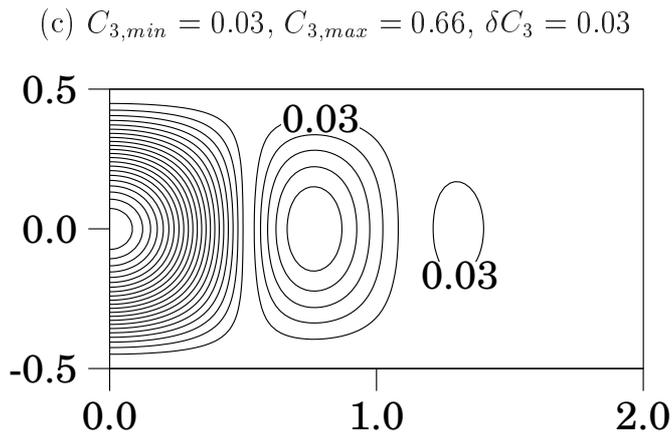
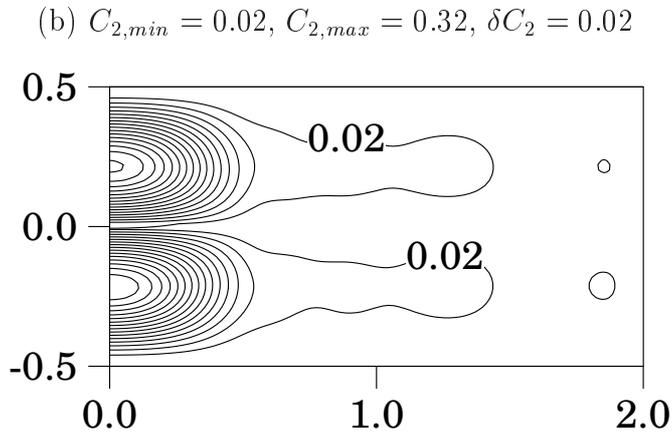
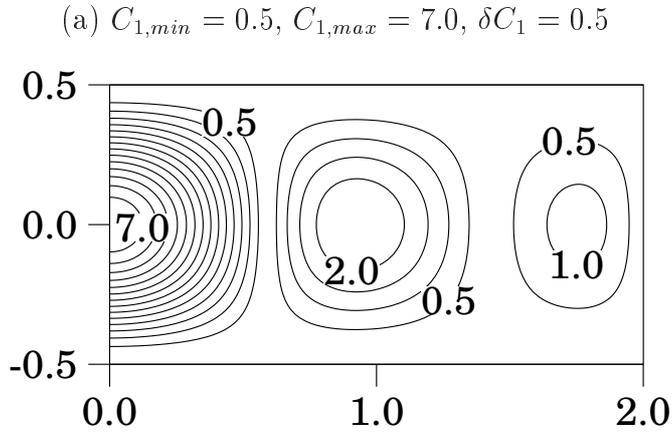


Figure 14: Contour lines of the  $|C_k(r, z)|$  fields (for  $w$  at  $Ra = 2700$ ). (a)  $k = 1$ , (b)  $k = 2$  and (c)  $k = 3$ . Displayed contours range from  $C_{k,min}$  to  $C_{k,max}$  with steps of  $\delta C_k$ .

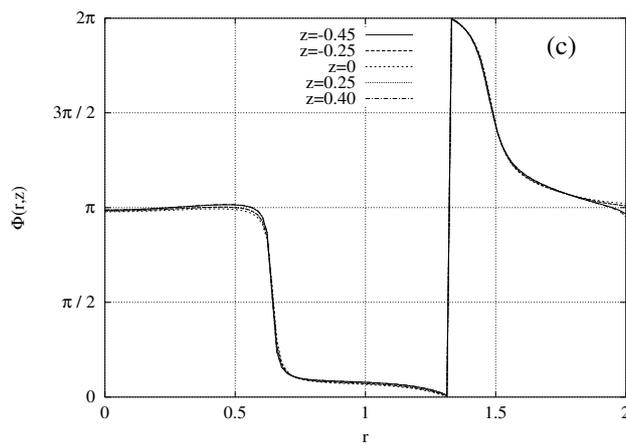
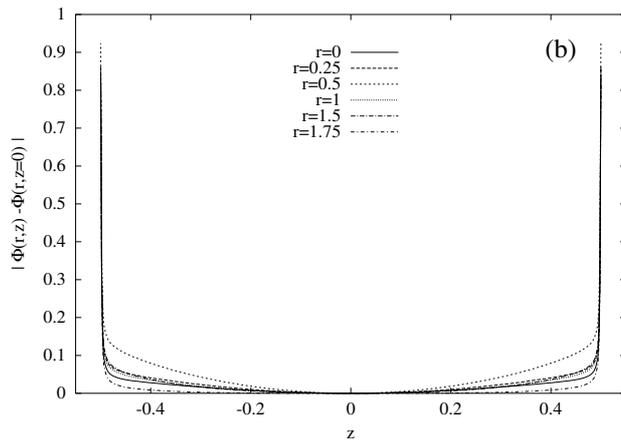
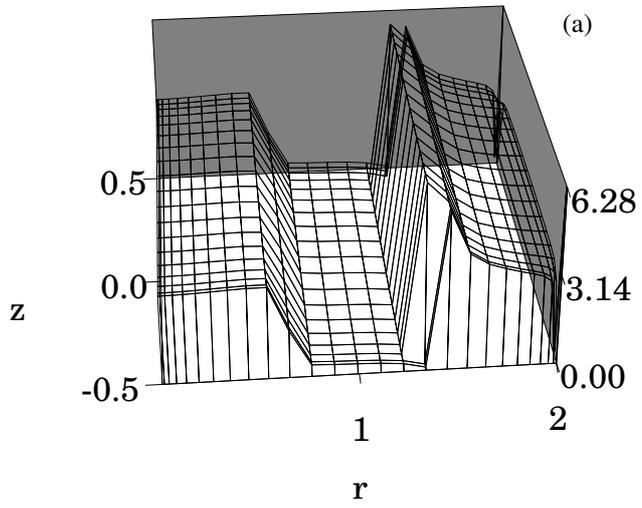


Figure 15: Phase  $\Phi$  of the dominant  $w$  ( $k = 1$ ) mode for the  $Ra = 2583$  flow. (a) In the enclosure. (b)  $|\Phi(r, z) - \Phi(r, 0)|$  sections for given  $r$  values. (c)  $\Phi(r, z)$  cross sections for given  $z$  values.

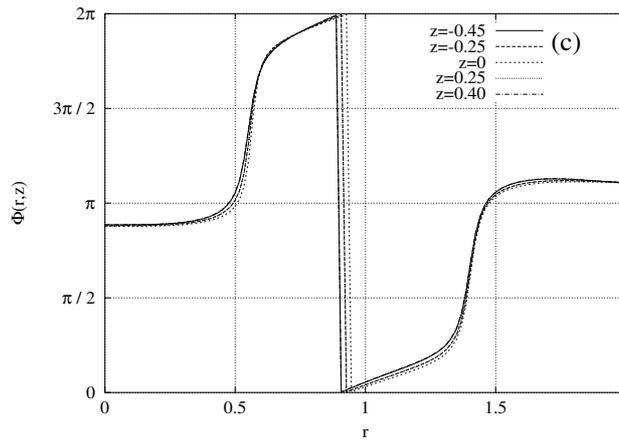
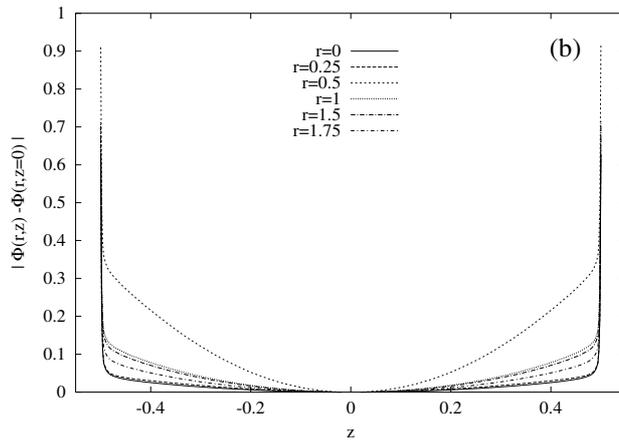
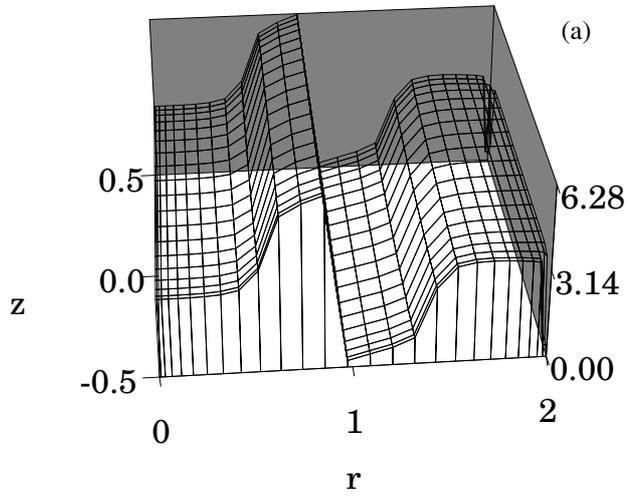


Figure 16: Phase  $\Phi$  of the dominant  $w$  ( $k = 1$ ) mode for the  $Ra = 2825$  flow. (a) In the enclosure. (b)  $|\Phi(r, z) - \Phi(r, 0)|$  sections for given  $r$  values. (c)  $\Phi(r, z)$  cross sections for given  $z$  values.

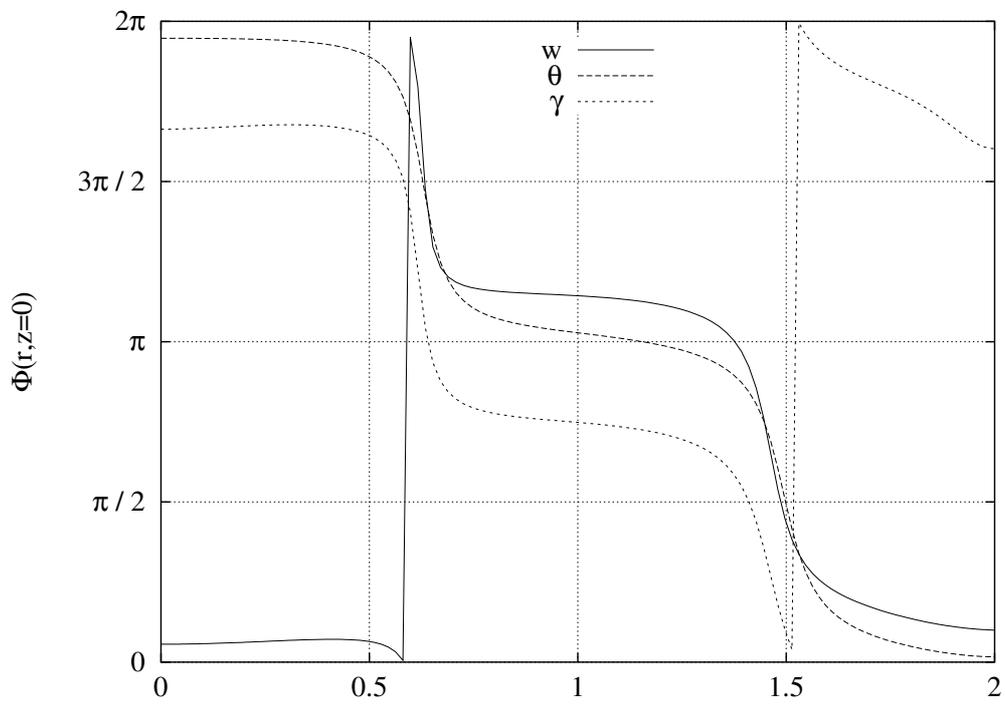


Figure 17:  $\Phi(r, z = 0)$  for  $w$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  for the  $Ra = 2583$  flow.

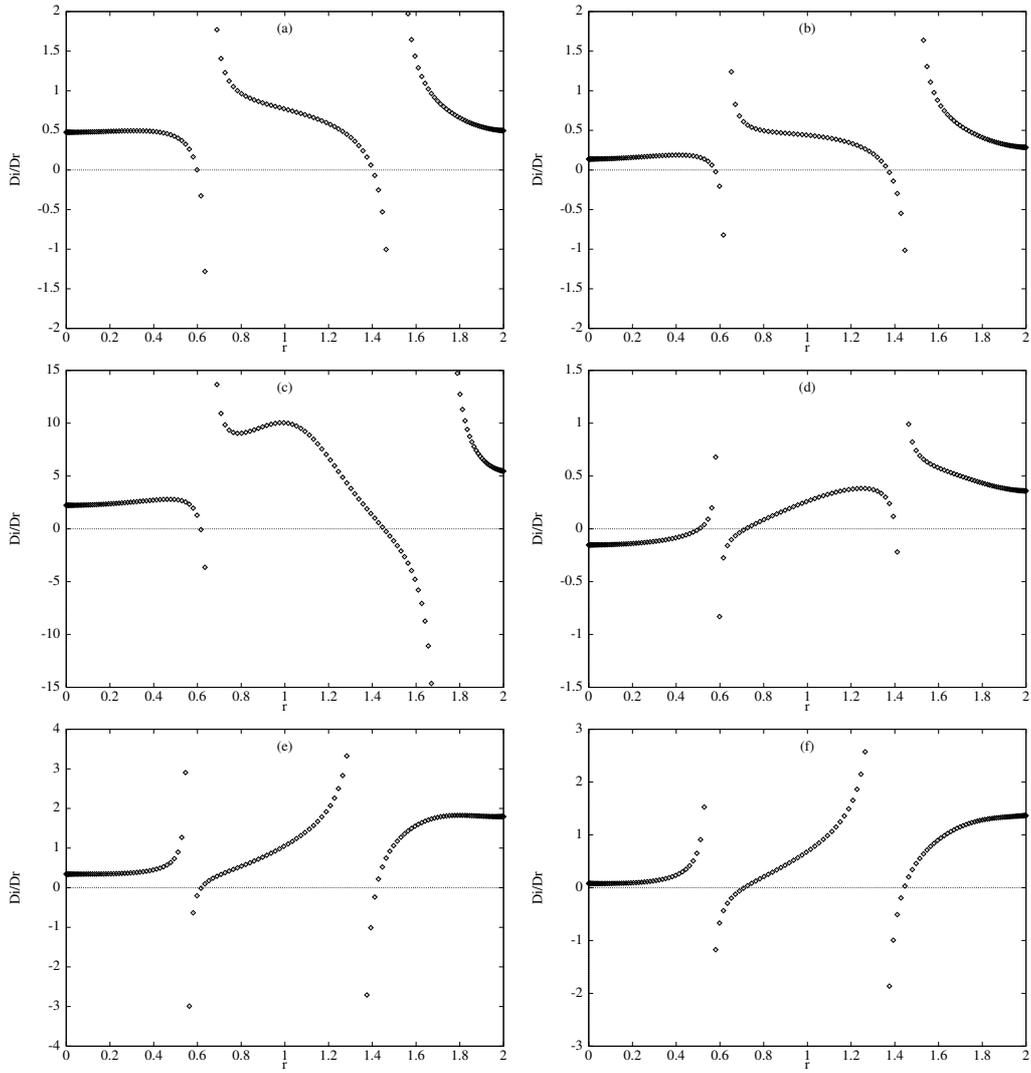


Figure 18: Computed  $D_i/D_r$  ratios of  $w$  along the radius of the enclosure, at mid-height ( $z = 0$ ) for 6 values of the Rayleigh number: (a)  $Ra = 2574$ , (b)  $Ra = 2583$ , (c)  $Ra = 2600$ , (d)  $Ra = 2700$ , (e)  $Ra = 2825$  and (f)  $Ra = 2870$ .

# Chapitre 6

## Influence du confinement sur les bifurcations de l'état oscillant

### 6.1 Introduction

Comme l'a montré l'étude du cas  $\Gamma = 2$  du chapitre précédent, le confinement induit des comportements spécifiques très différents de ceux observés en cavité de grande extension.

Afin d'en savoir plus sur les effets liés à la présence plus ou moins proche de la paroi latérale, des calculs relatifs aux cas  $\Gamma = 1$  et  $\Gamma = \frac{1}{2}$  ont été menés, les caractéristiques physiques du fluide binaire restant fixées à  $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ . Toujours dans l'optique d'étudier les conséquences du confinement sur les états du système, le cas où un glissement le long de la paroi latérale est permis a aussi été étudié, pour ces trois même rapports d'aspect.

Les résultats obtenus et développés ci-après montrent que, selon la configuration étudiée, l'état oscillant subit de multiples bifurcations de types différents. En particulier, lorsqu'une condition de glissement est imposée le long de la paroi latérale, les états oscillants subissent une cascade de doublements de période qui mène à un régime chaotique, lui même suivit d'autres bifurcations "typiques" des systèmes dynamiques. Lorsque l'adhérence est imposée le long de la paroi latérale, cette séquence de bifurcation n'a pas lieu. Le système n'est alors néanmoins pas exempt de comportements très particuliers. On observe en effet que pour  $\Gamma = 1$  et  $\frac{1}{2}$ , la branche des états oscillants s'achève par une bifurcation homocline, transition qui n'a rien en commun avec la bifurcation de Hopf généralisée obtenue pour le cas  $\Gamma = 2$ .

En étudiant les tendances et en comparant les évolutions et apparitions ou non de certaines bifurcations clefs, on arrive ainsi à dégager certains effets directement dûs à un plus ou moins fort confinement.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont donné lieu à un article en phase finale de rédaction intitulé "Bifurcation multiplicity of the oscillatory convective states of an enclosed binary liquid", reproduit dans les pages (109-130) suivantes.

## 6.2 Les multiples bifurcations des états oscillants

Les six séries de résultats, relatifs aux cas  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , 1 ou 2 et aux deux types de condition aux limites ont un certain nombre de points communs qui seront dans un premier temps présentés. Les points particuliers à chaque système seront ensuite évoqués et discutés.

On fera référence, pour plus de concision, au système où la condition d'adhérence du fluide est imposée le long de la paroi latérale comme étant "rigide". De même, lorsqu'un glissement est permis le long de cette frontière, le système sera dit "libre".

### 6.2.1 Les branches de solutions

Pour chacun des systèmes, on retrouve l'existence de régimes convectifs oscillants et stationnaires, ainsi que le résume le tableau 1 (page 122). Quatre points caractéristiques sont mentionnés :

- A** : Bifurcation de Hopf sous-critique de l'état conductif menant au régime oscillant.
- B** : Noeud-col de la branche des états oscillants. En deçà de ce seuil, le système rejoint l'état conductif.
- C** : Fin de la branche oscillante entraînant la transition vers les régimes de convection stationnaire.
- D** : Noeud-col de la branche stationnaire. En deçà de cette valeur, le système rejoint l'état oscillant s'il existe pour ces valeurs de  $Ra$ , l'état conductif sinon.

On remarque que les trois cas de configuration "libre" sont tous tels que  $\mathbf{D} < \mathbf{B}$  tandis que pour les systèmes "rigides" les trois positions relatives des branches sont possibles (et parcourues d'une façon non monotone en fonction de l'évolution de  $\Gamma$ ). Dans tous les cas, les transitions entre états sont source d'hystérésis.

L'évolution des valeurs des seuils pour lesquels a lieu la bifurcation de Hopf de l'état conductif (et des pulsations correspondantes, indiquées dans les graphiques présentés dans le tableau 2, page 123) en fonction du rapport d'aspect est conforme aux résultats déjà connus (présentés dans la première partie du manuscrit, section 2.4.4, page 26) :

1. Les valeurs augmentent un peu entre  $\Gamma = 2$  et  $\Gamma = 1$  et bien plus fortement lorsque  $\Gamma < 1$ .
2. Elles augmentent lorsque l'on passe d'un système "libre" à un système "rigide".

De plus, ces tendances sont aussi vérifiées par toutes les valeurs seuils des écoulements oscillants et stationnaires.

Avant de passer à une présentation plus approfondie des états oscillants, trois écoulements stationnaires sont donnés en figure 1, page 125. Pour les gammes de nombre de Rayleigh étudiés ici, le choix des conditions aux limites n'exerce quasiment aucune influence sur la structure des écoulements convectifs. On obtient toujours deux rouleaux contra-rotatifs pour  $\Gamma = 2$  et un seul lorsque  $\Gamma = 1$  ou  $\frac{1}{2}$ .

### 6.2.2 Les principales caractéristiques des états périodiques

L'évolution des pulsations en fonction de  $Ra$  des états oscillants monopériodiques rencontrés est donnée dans le tableau 2, page 123. Dans les cas où la transition vers la convection stationnaire a lieu à partir de ceux-ci, ce qui n'est le cas que pour les configurations "rigides", le point **C** est

indiqué. Sur les six cas étudiés, seuls les systèmes “rigides” et tels que  $\Gamma = \frac{1}{2}$  et 1 sont des cas où la pulsation atteint la valeur nulle à la transition vers la convection stationnaire.

Tous les régimes oscillants monopériodiques naissant à la bifurcation noeud-col de la branche oscillante (point **B**) possèdent la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  (présentée et discutée page 48). Rappelons ici que les écoulements possédant cette propriété de symétrie sont tels que l’application de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$  équivaut à une translation temporelle d’une demi-période.

Dans tous les cas hormis celui présenté dans le chapitre précédent ( $\Gamma = 2$ , système “rigide”), la symétrie  $\mathcal{T}$  est brisée lorsque  $Ra$  franchit la valeur seuil  $Ra_T$  (données dans le tableau 3, page 124). Cette brisure de symétrie temporelle est une bifurcation fourche à laquelle le cycle limite devient instable en donnant naissance à une paire de cycles limites (reliés par la symétrie miroir  $\mathcal{M}$ ). Cette bifurcation a lieu relativement près de la fin de la branche oscillante, ainsi que le montre les valeurs du tableau 3 (page 124). On remarque que la proportion de la branche oscillante pour laquelle la symétrie  $\mathcal{T}$  est vérifiée est d’autant plus importante que  $\Gamma$  est petit, qu’il s’agisse des configurations “rigides” ou “libres”. On peut ainsi relier la brisure de symétrie à la proximité de la paroi latérale. On retrouve aussi l’influence de cette dernière, comme le montrent les données de la dernière colonne du tableau, dans le fait que la proportion de la branche oscillante située à des valeurs de  $Ra$  inférieures à **A** est d’autant plus grande que  $\Gamma$  est petit.

Les bifurcations qui ont lieu au delà de  $Ra_T$  sont détaillées dans les paragraphes suivants.

### 6.2.3 Détail des bifurcations du système “libre”

Pour les trois valeurs de  $\Gamma$ , on obtient une séquence complexe de bifurcations (les diagrammes de bifurcation résultants pour  $\Gamma = 2$  et  $\frac{1}{2}$ , sont présentés dans la figure 2, page 126 ; celui du cas  $\Gamma = 1$  est donné en figure 6.1) suivant un seul et même scénario :

1. A une valeur  $Ra$  légèrement plus élevée que  $Ra_T$ , l’état monopériodique subit une cascade de doublements de période menant à des régimes chaotiques.
2. Dans cette région chaotique (jusqu’à une valeur de  $Ra = Ra_I$ ), on trouve des fenêtres de périodicité 7 et 5.
3. Lorsque  $Ra_I$  est atteint, une intermittence de crise a lieu : les domaines distincts dans lesquels existaient les deux solutions fusionnent (le nouvel ensemble limite redevient un système invariant sous l’action de  $\mathcal{M}$ ).
4. Le comportement chaotique continue jusqu’à  $Ra = Ra_C$ , où il se produit de toute évidence une crise de frontière (l’attracteur n’en est plus vraiment un ; il se met à “fuir”) : Après un transitoire chaotique, les trajectoires finissent par être éjectées du domaine et terminent sur le point fixe stable qu’est l’état convectif stationnaire.

Ni une exploration complète de tous les régimes possibles, ni une détermination plus précise des valeurs seuils  $Ra_I$  et  $Ra_C$  n’ont été tentés vu les quantités phénoménales de données (et de temps de calculs) qui seraient nécessaire pour obtenir celles-ci. Le scénario donné ci-dessus résulte ainsi d’une part de l’observations des comportements dynamiques des écoulements calculés et d’autre part de l’analyse de l’évolution du système en fonction de  $Ra$  rapportée aux comportements “typiques” bien identifiés de nombreux systèmes dynamiques modèles décrits dans de nombreux ouvrages de références (par exemple Manneville, 1990; Ott, 1993).

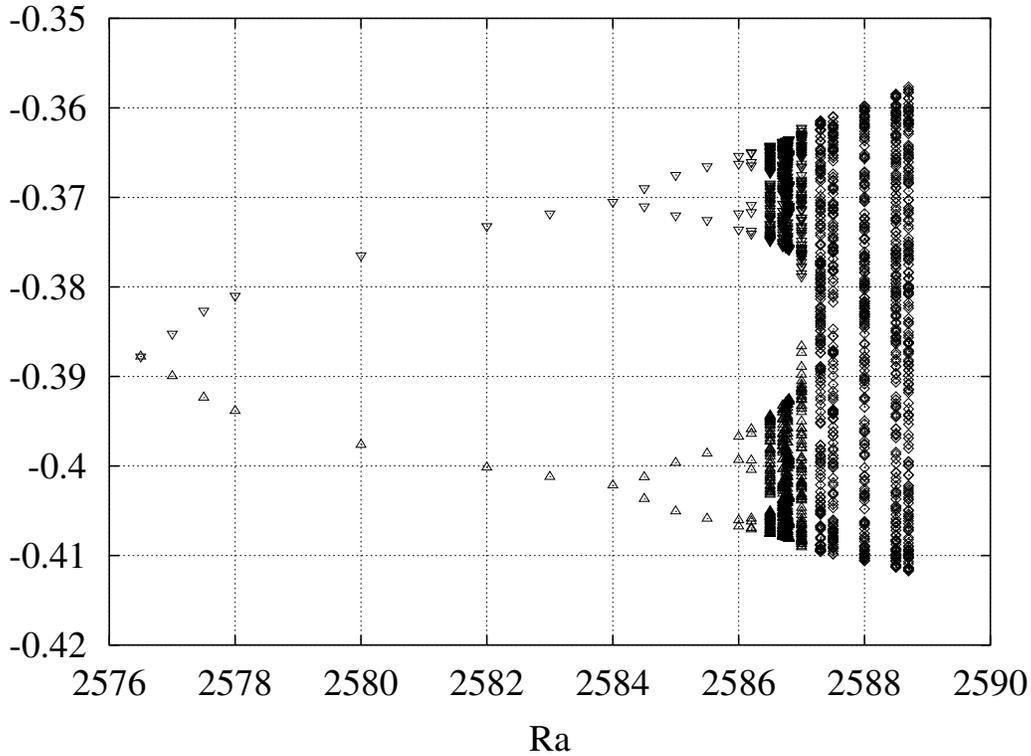


FIG. 6.1 – Diagramme de bifurcation (valeurs de  $\gamma$  dans la coupe de Poincaré) obtenu pour  $\Gamma = 1$  avec une condition de glissement sur la paroi latérale.

Les exemples suivants illustrent ce dernier propos :

- Dans chacun des cas, des écoulements de période 2 et 4 ont bien été obtenus. Cependant, la suite de la cascade ayant lieu dans un domaine (en  $Ra$ ) très petit, certains doubléments furent parfois dépassés (des exemples sont donnés dans la tableau 4, page 124). En inspectant les sections de Poincaré issues des écoulements calculés (tels que ceux présentés dans la figure 3, page 127) et les applications de  $n^{\text{ème}}$  retour de celles-ci, on observe que bien qu'elles ne soient pas unimodales, elles évoluent de manière très similaires à celle de l'application logistique (des différences plus importantes apparaissent au delà de la fenêtre de période 2). A partir de ces faits, il est présumé que la cascade de doubléments de période est très probablement complète (c.à.d : toutes les périodes  $2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ont lieu, dans l'ordre) pour les trois rapports d'aspects.
- De même, l'affirmation selon laquelle les fenêtres de périodicité 5 et 7 ont lieu est dûe à l'analyse des applications de  $5^{\text{ème}}$  et  $7^{\text{ème}}$  retours ainsi que le fait de les atteindre occasionnellement (à titre d'exemple, un comportement de période 5 a été obtenu pour  $Ra = 8942$  avec  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , de même pour un cas de période 10 pour  $Ra = 2586.79$  avec  $\Gamma = 1$ ), ou d'observer des comportements chaotiques correspondants (à  $Ra = 2586.8$  pour  $\Gamma = 1$  ainsi que  $Ra = 2551.725$  pour  $\Gamma = 2$ ).

## 6.2.4 Détail des bifurcations du système “rigide”

Avant d'évoquer les résultats pour  $\Gamma = 1$  et  $\frac{1}{2}$ , rappelons ce qui a été obtenu au chapitre précédent avec  $\Gamma = 2$  : La branche des états oscillants se termine par une bifurcation (sous-critique) généralisée de Hopf.

Comme il a été précédemment signalé, pour  $\Gamma = 1$  et  $\frac{1}{2}$ , la pulsation des états oscillants tend vers zéro à l'approche de la transition vers les régimes de convection stationnaires.

Ainsi que le montrent les diagrammes du tableau 2 (page 123) le comportement en fréquence du système au delà de  $Ra_T$  est très particulier. L'évolution des fréquences proche de la fin de la branche oscillante du système  $\Gamma = \frac{1}{2}$  est donnée dans la figure 4, page 128. On voit qu'il y a en fait deux branches de solutions, avec un léger recouvrement (en  $Ra$ ) de celles-ci. Etant donné que la branche supérieure se termine par une bifurcation noeud-col et que la branche inférieure commence de même, elles sont probablement connectées par une partie instable. Rappelons qu'une telle “torsion” de la branche oscillante a déjà été observé (voir page 29) lorsque l'effet Soret (stabilisant) est intensifié.

La branche inférieure se termine par une chute importante de la pulsation des oscillations, signe distinctif de la bifurcation que nous allons maintenant décrire.

La figure 5 (page 129) illustre le cycle limite du dernier état oscillant calculé ( $Ra = 15797.0098$ ). Si, partant de cette solution  $Ra$  est alors incrémenté à 15797.0099, l'écoulement devient stationnaire. Le trajet suivi par le système à partir de cet incrément de  $Ra$  (la position du système à cet instant est indiquée par les points) est indiqué en pointillés sur la figure. Cette trajectoire suit dans un premier temps le cycle limite (les deux courbes sont confondues), jusqu'à atteindre une variété instable qui l'éjecte vers le point fixe (représenté par une étoile) correspondant à l'état stationnaire final.

Ainsi qu'évoqué dans la première partie du manuscrit (voir page 31), dans les systèmes infinis naissent, à la bifurcation de Hopf de l'état conductif, des ondes propagatives et stationnaires. Chacune d'elle subit une bifurcation spécifique qui implique que la période de l'oscillation va tendre vers l'infini à l'approche de la bifurcation. Dans le cas des ondes stationnaires la bifurcation a lieu lorsque le cycle limite percute un point fixe (c.à.d : un état de convection stationnaire). Cette bifurcation globale entraînant l'annihilation de la solution oscillante est la bifurcation homocline exposée dans la partie précédente (section 4.5.4, page 59). Conséquemment, au voisinage du seuil la période  $P$  des oscillations doit évoluer suivant la relation  $P \propto -\ln(Ra_C - Ra)$  où  $Ra_C$  est la valeur à laquelle a lieu la bifurcation. On observe effectivement (figure 6, page 130) que la période des oscillations tend bien vers l'infini en suivant la relation  $P \propto -\ln(Ra_C - Ra)$  à l'approche du seuil.

Bien évidemment, cette bifurcation homocline a identiquement lieu pour les deux cycles limites (images l'un de l'autre par  $\mathcal{M}$ ) avec l'un des points de la paire de points fixes (images l'un de l'autre par  $\mathcal{M}$ ) dont les variétés instables envoient le système vers l'un des deux points fixes (eux aussi reliés par  $\mathcal{M}$ ) représentant les régimes convectifs stables. Ainsi, bien que la paire de cycles limites et la paire d'états stationnaires stables ne soient pas directement liés, il y a une correspondance univoque entre chacun.

La branche oscillante du cas  $\Gamma = 1$  subit de même une bifurcation homocline. La seule différence entre les deux systèmes est que pour ce dernier, on n’observe pas de “torsion” de la branche oscillante.

## 6.2.5 Influence du confinement sur l’apparition des bifurcations

Résumons les différentes informations obtenues par les études décrite ci-dessus :

1. Les bifurcations subies par des états oscillants sont très différentes selon qu’il s’agisse du système “rigide” ou “libre”.
2. Dans le cas des systèmes “libres”, on observe des doublements de période et des régimes chaotiques suivant un scénario identique pour les trois valeurs de  $\Gamma$  étudiées.
3. Le rapprochement de la paroi latérale (un effet bien évidemment stabilisant) peut induire une “torsion” de la branche oscillante et ainsi mener à la création de deux branches d’états oscillants stables (avec pour conséquence directe la génération d’une bande de fréquences interdite).
4. La brisure de la symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  a lieu “d’autant plus tôt” que  $\Gamma$  est petit. Il semblerait donc qu’elle n’ait lieu que pour des valeurs de  $\Gamma$  en deçà d’une valeur critique.

La perte (ou non) de la propriété de symétrie temporelle des solutions oscillante, est un point clef vis-à-vis de l’évolution dynamique ultérieure du système, qu’il soit de type “rigide” ou “libre”.

Rappelons en effet les résultats essentiels suivants :

- Pour le système “rigide” : Lorsque la brisure de  $\mathcal{T}$  n’a pas lieu ( $\Gamma = 2$ ) la branche des états oscillants se termine par une bifurcation sous-critique généralisée de Hopf, tandis que si elle est brisée, cette branche disparaît dans une bifurcation homocline.
- Pour le système “libre” : Si la brisure de  $\mathcal{T}$  n’a pas lieu, alors la route vers le chaos ne peut avoir lieu. Il est en effet montré (Swift & Wiesenfeld, 1984) qu’une absence de symétrie temporelle est une condition **nécessaire** pour que puisse survenir un doublement de période dans un système.

# Bifurcation multiplicity of the oscillatory convective states of an enclosed binary liquid

E. MILLOUR<sup>a</sup>, E. TRIC<sup>a,b</sup> and G. LABROSSE<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Université Paris-Sud,  
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique  
et les Sciences de l'Ingénieur  
LIMSI-CNRS BP 133, 91403 ORSAY CEDEX, FRANCE.*

<sup>b</sup>*Université Nice Sophia Antipolis,  
Laboratoire Géosciences AZUR,  
250 rue Albert Einstein, 06560 VALBONNE, FRANCE.*

## Abstract

The axisymmetric convective states of a binary liquid enclosed in a vertical cylinder heated from below are determined by pseudo-spectral numerical integration. In order to gain some insight on the constraints that nearby boundaries can exert on the convective flows, three aspect ratios (radius over height of the cylinder), as well as two types of lateral kinematic boundary conditions (either no-slip or free-slip) are investigated. The oscillatory flows that occur are found to undergo a large variety of local and global bifurcations, the occurrences of which strongly depend on the chosen aspect ratio and boundary conditions. The multiplicity of oscillatory behaviors found in infinite or extended cavities is hence also present in enclosed ones.

## 1 Introduction

Since the first investigations of Bénard and Rayleigh, convection in horizontal fluid layers heated from below is a problem that has been extensively studied in the context of pattern formation, instabilities and dynamical behavior of nonlinear systems. About 30 years ago, the case of binary mixtures [18] in the same straightforward configuration was investigated and turned out to yield additional complex spatiotemporal behavior, which can moreover arise (in contradistinction to pure fluids in the same conditions) as the quiescent state turns unstable. In binary liquid mixtures, solute mass fraction and temperature gradients are coupled by the Soret effect. Consequently, a homogeneous mixture, once subjected to a thermal gradient, separates in composition. According to the sign of the Soret coefficient, the solute (which we take to be the heavier of the two components) migrates towards the warmer or colder part of the container. The resulting Soret-driven mass fraction gradient thus induces a solutal buoyancy that works with or against the thermal

one. Both sign and amplitude of the Soret coupling are accounted for in the dimensionless separation ratio  $\psi$ . When  $\psi$  is negative, thermal and solutal buoyancies compete and the interplay between the two leads to the aforementioned dynamical behaviors.

An impressive number of studies have been published (see for instance [1],[11] and references therein) on this system, mainly focused on horizontally infinite or very extended layers. In such systems, endwalls are sufficiently distant so that a preferential horizontal direction for wave propagation is generated and hence favors 2D flows. However, for most practical systems where mixtures are expected to convect, the ratios between the enclosure's extents are more modest. In such geometries, the presence of nearby walls can be expected to exert a significant influence on the convective flows' dynamics, as indicated by experimental results (e.g: [9, 10, 19]).

The present contribution is in the spirit of works dealing with 2D extended layers in that only 2D flows are modeled, albeit in cells of similar height and width. Doubly diffusive convection (in which the Soret effect is neglected and a vertical mass fraction gradient is externally imposed) in 2D Cartesian enclosures of small lateral extension has been the subject of a series [4, 6, 15] of numerical investigations. In these rectangular boxes, oscillatory solutions exhibit a rich variety of spatiotemporal behaviors, such as multiple coexisting branches of "bubble" structure (cascades of period doubling bifurcations leading to chaos and followed by reverse sequences which restore simple periodicity). The case of binary liquid (Soret effect included) convection in cylindrical cells of small aspect ratio  $\Gamma$  (radius over height ratio) has been numerically investigated by [3, 13]. These works mainly consist in 3D linear stability analyses of the rest state. To the authors' knowledge, there are no published work on 3D numerical integration of comparable cases (i.e. where thermal convection of a binary liquid of negative separation ratio in a cylindrical enclosure is modeled) to the ones investigated here.

Three aspect ratios are considered:  $\Gamma = 1/2, 1$  and  $2$ , as well as two types of boundary conditions for the velocity on the circumference of the cylinder, either no-slip or free-slip. The former simply represents the presence of a rigid wall, whereas the latter is a crude approximation (capillary effects being discarded) of a straight free surface and the modeled system then corresponds to a liquid bridge [22].

The paper is organized as follows: The equations ruling binary convection are given and discussed in section 2, along with a presentation of the

numerical tool used to solve them. Results obtained for the six modeled configurations are given and compared in section 3, where the multitude of bifurcations that are encountered are detailed. Our conclusions are then summarized in section 4.

## 2 Physical Model

### 2.1 Ruling equations

The usual Oberbeck-Boussinesq equations, Soret effect included, are considered. Using the height  $h$  of the layer, the thermal diffusion velocity over  $h$ , the imposed temperature difference  $\Delta T$  and the Soret-induced mass fraction difference  $\Delta C$  of the quiescent state as reference scales leads to the following set of dimensionless equations:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Ra Pr (\theta + \Psi \gamma) \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z + Le (\nabla^2 \gamma - \nabla^2 \theta), \quad (4)$$

where  $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_r + w \mathbf{e}_z$  is the velocity,  $\mathbf{e}_r$  and  $\mathbf{e}_z$  respectively being the radial and upward unit vectors.  $p$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  denote departures from the static pressure, temperature and mass fraction profiles.  $Ra$ ,  $Pr$  and  $Le$  are the usual Rayleigh, Prandtl and Lewis numbers and  $\Psi$  is the separation ratio between the solutal and thermal contributions to the density. The last three parameters are constant for a given fluid and here set to  $Pr = 1$ ,  $Le = 0.1$ ,  $\Psi = -0.2$  (values that roughly are those of a  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  mixture [21]), leaving  $Ra$  as the main parameter of this study. Taking  $\Psi$  to be negative implies that solutal and thermal buoyancies compete.

Temperatures are imposed on the horizontal walls, along with lateral thermal insulation and impermeability at all boundaries. Top and bottom boundary conditions are:

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} = u = w = 0 \quad \text{for } z = \pm \frac{1}{2}.$$

Denoting the aspect ratio  $\Gamma = R/h$ , where  $R$  is the radius of the cylinder, the lateral conditions on the scalar fields are:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = 0 \quad \text{for } r = \Gamma.$$

As previously mentioned, two sets of kinematic lateral boundary conditions are considered:

$$(a) \quad u = w = 0 \text{ for } r = \Gamma,$$

or

$$(b) \quad u = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ for } r = \Gamma.$$

In all that follows, these will be referred to as (a) NS and (b) FS configurations.

## 2.2 Symmetries of the solutions

Since in the following sections the symmetries of both steady and time-dependent convective states will be of interest, we mention here that the up-down symmetry in the governing equations implies the following:

If  $X_1 = (u_1, w_1, p_1, \theta_1, \gamma_1)$  satisfies equations (1-4), then so does  $X_2 = (u_2, w_2, p_2, \theta_2, \gamma_2)$ , provided that

$$\begin{aligned} u_2(r, z, t) &= u_1(r, -z, t) \\ w_2(r, z, t) &= -w_1(r, -z, t) \\ p_2(r, z, t) &= p_1(r, -z, t) \\ \theta_2(r, z, t) &= -\theta_1(r, -z, t) \\ \gamma_2(r, z, t) &= -\gamma_1(r, -z, t) \end{aligned}$$

Solutions therefore either come in pairs that transform into one another under this mirror symmetry (which will be referred to as  $\mathcal{M}$  throughout this paper) or are invariant under such a transformation.

Periodic oscillations (of period  $\tau$ ) may possess a temporal symmetry  $\mathcal{T}$  relating solutions separated by half a period in the following way:

$$\begin{aligned} u(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= u(r, -z, t) \\ w(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -w(r, -z, t) \\ p(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= p(r, -z, t) \\ \theta(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -\theta(r, -z, t) \\ \gamma(r, z, t + \frac{\tau}{2}) &= -\gamma(r, -z, t) \end{aligned}$$

The role of temporal symmetry and its practical implications has been examined and clarified by [20]. The main result of this study is that in systems such as the one investigated here, symmetric oscillations cannot undergo period doubling bifurcations. Hence, symmetric solutions are typically [6] found to first bifurcate to asymmetry before undergoing period doubling.

### 2.3 Numerical tool and accuracy

A Chebyshev pseudo-spectral method and a second order finite differences scheme have respectively been used to solve the space and time evolution of the fields. The main characteristics of the numerical tool, as well as the accuracy assessments have all been presented in [14]. It is only recalled here that all the forthcoming results were obtained with high accuracy. For instance, computations were done with grids of  $(101 \times 51)$ ,  $(71 \times 71)$ ,  $(51 \times 101)$  nodes in the  $(r \times z)$  directions and results cross-checked on finer grids of  $(161 \times 81)$ ,  $(111 \times 111)$  and  $(81 \times 161)$ , respectively. Resulting shifts in bifurcation values (even in regions where chaotic flows occur) were of less than 0.05 %. From that, error bars would be extremely small on the plots to come, compared to point size.

## 3 Results

Results are presented in three steps, starting with an overview of the branches of solutions with their general characteristics, followed by a presentation of the angular frequencies' dependency on the Rayleigh number. Finally, the oscillatory flows' successive bifurcations, up to the transition to Steady Overturning Convection (SOC) are described.

### 3.1 Branches of solutions

It is well known that, for binary liquids, a sequence of allowed states occurs as  $Ra$  is increased, starting from the quiescent state towards steady states after an intermediate oscillatory regime. Each of these states exists over a given domain, thus leading to hysteresis in transitions from one solution to the other. The branches of solutions of all the configurations investigated in this work are given in Table 1, along with the threshold values of the various regimes, accurately determined by measuring the decay rates of perturbations as the system relaxes towards its final state (see [14]). Four characteristic points are mentioned:  $A$  for the end of the rest state branch (subcritical Hopf bifurcation),  $B$  (saddle-node) and  $C$  (see third subsection), the extremities

of the oscillatory branch and  $D$  (saddle-node) the beginning of the SOC domain. Going from the leftmost to rightmost column, the steady state branch moves from the left of  $B$  to the right of  $A$ . The FS cases are all found to have access to only one of these configurations, the leftmost, whilst the NS one spans all three possibilities, non-monotonically with  $\Gamma$ .

The evolution of the Hopf threshold (and corresponding marginal frequency given on the plots in Table 2) of the rest state with respect to changes in aspect ratio values agrees with linear stability results ([3] and [13]):

1. the values increase slightly from  $\Gamma = 2$  to 1 and much more dramatically when  $\Gamma < 1$ ;
2. they increase as well going from FS to NS conditions.

Moreover, these trends also hold for all the thresholds of both oscillatory and steady flows.

Before going into a more in-depth description of the oscillatory branches, we mention here that the steady convective states' characteristics, in the range of  $Ra$  values considered, are very similar for a given aspect ratio (1 roll for  $\Gamma = 1$  and  $1/2$  and a pair of rolls for  $\Gamma = 2$ ) and not sensitive to the choice of boundary conditions. Figure 1 depicts typical flow structures for  $\Gamma = 1/2, 1$  and  $2$ .

### 3.2 General features of the oscillatory states

Table 2 depicts the angular frequencies of all the mono-periodic oscillatory states, for all  $\Gamma$  and both types of boundary conditions. Going along these curves with increasing  $Ra$  values corresponds to following the oscillatory branches of Table 1, from point  $B$  up to point  $C$  in the NS case or up to the last mono-periodic flow in the FS one.

Point  $C$  is not given for the FS configurations in Table 2 as the oscillatory states at the end of the branches are aperiodic (as will be shown in the next section). Of all six investigated cases, only two ( $\Gamma = 1, NS$  and  $\Gamma = 1/2, NS$ ) are such that the frequency of the oscillations go to zero as the transition to SOC is reached.

Before going into the detailed description of the various bifurcations that occur for each case and configuration, let us mention that all time dependent states which stem from  $B$  share the temporal symmetry  $\mathcal{T}$ . In all cases but the  $\Gamma = 2, NS$  one (where it holds over the whole of the oscillatory domain,

[14]), symmetry  $\mathcal{T}$  eventually breaks down. This symmetry breaking occurs via a supercritical pitchfork bifurcation at the  $Ra$  ( $= Ra_T$ ) values given in Table 3. The proportion of the oscillatory domain over which  $\mathcal{T}$  holds (Table 3) is found to increase with  $\Gamma$  in both the FS and NS configurations, which could imply that  $\Gamma$  needs to be smaller than a critical value in order to break the  $\mathcal{T}$  symmetry. A similar effect apparently also due to the highly constrained geometry of the enclosure is reflected by the fact that the proportion (given in Table 3) of the oscillatory domain that lies at  $Ra$  values below the Hopf bifurcation of the quiescent state decreases when  $\Gamma$  increases.

The next section deals with the description of the bifurcations that occur beyond  $Ra_T$ .

### 3.3 Successive bifurcations of the oscillatory flows

#### 3.3.1 FS configuration

Surprisingly, for all three values of  $\Gamma$ , the ordering of the (multiple) bifurcations that occur (along with the associated dynamical behaviors) are such that:

1. For  $Ra$  slightly higher than  $Ra_T$ , the oscillatory state undergoes a period doubling cascade that leads to chaotic regimes (as shown by the bifurcation diagrams in Figure 2).
2. In this chaotic region (up to  $Ra = Ra_I$ ) period 7 and period 5 windows are encountered.
3. At  $Ra_I$ , crisis-induced intermittency occurs: the separate domains in which the  $\mathcal{M}$ -related solutions lived merge and the flow become statistically invariant under  $\mathcal{M}$ .
4. Chaotic behavior continues until  $Ra = Ra_C$  is reached, where there is evidence of a boundary-induced crisis (the attractor becomes ‘leaky’): After a chaotic transient, trajectories eventually escape, leading the flow to the nearby (SOC) stable fixed point.

Exploring thoroughly the sequences of bifurcation as well as accurately determining the values of thresholds  $Ra_I$ ,  $Ra_C$  and ranges of periodic windows has not been attempted, as such would require considerable amounts of computing time. Hence, the given scenario is inferred from obtained results and comparison with typical results detailed in classical textbooks on dynamical systems (such as [17, 12], among many others). For the sake of completeness, we give the following examples:

- In all cases period 2 behavior is indeed found to be followed by period 4, but as the period doubling cascade continues, it does so in a very narrow range in  $Ra$ , and intermediate doublings were sometimes missed (see Table 4). A closer look at the Poincaré section return maps (such as the ones shown in Figure 3) and successive embedding thereof shows that, even though the maps are not unimodal, they evolve very much as the standard logistic map does (greater differences do arise beyond the period 2 window). From that, we conjecture that the period doubling cascade is probably complete in all three configurations.
- Similarly, the statement that period 5 and 7 windows occur comes from the combined examination of return maps and results such as landing in one (for instance, period 5 behavior is found at  $Ra = 8942$  for  $\Gamma = 1/2$  and period 10 occurs when  $Ra = 2586.79$  for  $\Gamma = 1$ ) or witnessing related chaotic behavior (at  $Ra = 2586.8$  for  $\Gamma = 1$  as well as at  $Ra = 2551.725$  for  $\Gamma = 2$ ).

It might be worth mentioning here that the aforementioned results [4, 6, 15] on doubly diffusive convection in rectangular boxes, where temporal symmetry breaking followed by a cascade of period doubling bifurcations leading to chaotic oscillations occur, were obtained with free-slip boundary conditions.

### 3.3.2 NS configuration

The  $\Gamma = 2$ , NS case, has been exhaustively presented in [14]. Let us merely recall here that the oscillatory branch ends there in a generalized (or secondary) subcritical Hopf bifurcation, a feature that is not encountered in any of the other configurations.

As for the  $\Gamma = 1$  and  $1/2$  configurations, they have much in common. As previously mentioned, these are the only cases for which the frequency of the oscillations is found to go to zero as the transition to SOC is reached.

As might be guessed from the cluster of points near the end of the oscillatory branches given in Table 2, quite distinctive behavior occur there. An enlargement of the end of the oscillatory branch ( $\Gamma = 1/2$  case) is given in Figure 4, showing that there are in fact two branches which overlap over a very narrow range in  $Ra$ . Since the upper branch ends in a saddle-node bifurcation and the lower branch begins at one, we conjecture that they are directly connected to each other by an unstable part (obviously inaccessible to our time marching process). Such “bending” of the traveling wave branch

leading to the appearance of two stable oscillatory states has been shown to appear [11] as the (stabilizing) Soret coupling is increased (i.e. when  $\Psi$  is negative and increased in magnitude). Apart from the coexistence of two oscillatory states, another important feature depicted in Figure 4 is the extremely sharp drop in frequency (down to zero, as will be shown in the following paragraphs) that occurs at the end of the lower branch.

It is well known (see for instance [5, 7]) that in horizontally infinite plane layers, the Hopf bifurcation of the rest state yields branches of traveling (TW) and standing (SW) waves. Linear and weakly nonlinear analyses of binary fluid convection in infinite layers show that the former are preferred near onset, the later being in most relevant cases unstable, which is consistent with both numerical [11, 2] and experimental [16] results. Moreover, studies [5, 7] of the interaction of the two types of waves with SOC solutions show that in both cases the period  $P$  of the waves approaches infinity as the bifurcation is reached. In the case of standing waves,  $P \propto -\ln(Ra_C^{SW} - Ra)$  while  $P \propto 1/(Ra_C^{TW} - Ra)^{1/2}$  for traveling waves, where  $Ra_C$  denotes the  $Ra$  value at which the corresponding bifurcations occur. The bifurcation that causes standing waves to vanish (in the plane layer case) is a heteroclinic bifurcation between the limit cycle and a pair of steady state solutions. Note that there are other possibilities of losing the SW states due to homoclinic and heteroclinic bifurcations as oscillatory and SW branches meet. An exhaustive analysis of these, along with the complex dynamics (such as period doubling and chaotic behavior) that they induce prior to the transition to SOC, is given in [6].

When the investigated system is not unbounded, pure traveling waves such as those obtained in infinite layers (or in their experimental counterparts that are annular channels) cannot occur, although analogous (e.g. [8, 14]) propagating waves, which in most cases are simply referred to as being traveling waves, are generally observed in finite geometries. The oscillatory convective flows obtained in the present study are of this type.

As shown in Figure 4, the last computed oscillatory state is such that  $\omega(Ra = 15797.0098) = 2.1566539$ . If  $Ra$  is then increased to 15797.0099, the flow evolves into SOC. An illustration of the way this transition occurs is given in Figure 5 where phase portraits of the limit cycle are shown (solid curve). In the figure is also shown (dashed curve) the path followed by the system from the instant that  $Ra$  is increased, the initial state of the system being indicated by the large dot. From that point, the system first follows closely the path given by the  $Ra = 15797.0098$  limit cycle, up to an outset

that sends it off towards the stable SOC fixed point (star).

The suddenness of this transition, along with the fact that as  $Ra$  is increased towards its critical value  $Ra_C$ , the system remains for longer time spans in the vicinity of the upcoming outset, clearly show that the oscillatory branch undergoes a homoclinic bifurcation at  $Ra_C$ . The period of the oscillations does therefore indeed go to infinity as  $Ra$  is increased to  $Ra_C$ , following the  $P \propto \ln(Ra_C - Ra)$  scaling, as shown in Figure 6.

Clearly, both  $\mathcal{M}$ -related limit cycles undergo a homoclinic bifurcation as they approach the  $\mathcal{M}$ -related unstable saddles (unstable SOC states), the outsets of which lead to the  $\mathcal{M}$ -related (stable) SOC. Consequently, once the system has undergone the temporal symmetry breaking at  $Ra_T$  and evolved, depending on its initial condition, to either one of the  $\mathcal{M}$ -related oscillatory branch, which member of the SOC states pair it will eventually end up in is known.

This homoclinic bifurcation of the oscillatory branch also occurs in the  $\Gamma = 1$  case. The only difference between the  $\Gamma = 1$  and  $\Gamma = 1/2$ , NS configurations is that the branch ‘bending’ observed in the latter is not found in the former.

## 4 Conclusions

In this paper, axisymmetric convection of a binary liquid enclosed in a vertical cylinder was investigated. In order to clarify the constraints that nearby side boundaries exert on the convective flows, three aspect ratios ( $\Gamma = 2, 1$  and  $1/2$ ), as well as either no-slip or free-slip boundary conditions on the cylinder’s circumference have been considered.

The oscillatory states are found to undergo various and multiple bifurcations, the occurrences of which strongly depend on the choice of both boundary conditions and aspect ratio.

In all cases, the first oscillatory regimes share a particular spatiotemporal symmetry  $\mathcal{T}$ . For greater thermal forcing (higher  $Ra$  values), this symmetry is most often broken. Because the proportion of the oscillatory domain over which  $\mathcal{T}$  holds is found to decrease with decreasing  $\Gamma$ , the breaking of this symmetry can be inferred to be a consequence of the stabilizing constraint due to the presence of nearer side boundaries.

When the kinematic condition on the cylinder's circumference is set to free-slip, temporal symmetry breaking is followed by a period doubling route to chaos, itself followed by crisis induced intermittency as the two attractors (born as  $\mathcal{T}$  is broken) merge. This final attractor then vanishes in a boundary-induced crisis that leads to stationary convection. Since period doubling requires [20] temporal symmetry breaking, which will probably not occur for large aspect ratios, neither will the route to chaos described in section 3.

If the cylinder's circumference is taken to be a solid wall (no-slip boundary conditions), then temporal symmetry breaking is found to occur for  $\Gamma = 1/2$  and 1, but not for  $\Gamma = 2$ . In the later case, the oscillatory branch ends in a generalized subcritical Hopf bifurcation, whereas in the former two it ends in a homoclinic bifurcation, as the limit cycle collides with an (unstable) SOC fixed point. How (and why) the relative proximity of the sidewall can lead to either of these two very different bifurcations (the Hopf bifurcation is local, while the homoclinic bifurcation is global) remains an open question. Another stabilizing constraint induced by the proximity of the sidewall that was found is the 'bending' of the oscillatory branch that leads to the appearance of two stable oscillatory states (and consequently to a gap in frequency over which there are no possible stable oscillatory flows).

All these results show that taking into account the presence of nearby side boundaries induces significant changes in the dynamical behavior of binary liquid convection.

## Acknowledgments

We gratefully acknowledge the Centre de Ressources Informatiques de l'Université Paris-Sud for granting us unbounded use of their computer facilities.

## References

- [1] Barten, W., Lücke, M., Kamps, M. and Schmitz, R. 1995, Convection in binary fluid mixture. I. Extended traveling-wave and stationary states, *Phys. Rev. E*, 51, 5636-5661.
- [2] Bensimon D., Pumir A. and Shraiman B.I., 1989, Nonlinear theory of traveling wave convection in binary mixtures. *J. Phys. France*, 50, 3089-3108.

- [3] Hardin, G. R., Sani, R. L., Henry, D. and Roux, B. 1990, Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with Soret effect. Part I: general theory and stationary stability results. *Int. J. for Num. Meth. In Fluids*, 10, 79-117.
- [4] Huppert H.E. and Moore D.R., 1976, Nonlinear double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 78 (4), 821-854.
- [5] Knobloch E., 1986, Oscillatory convection in binary mixtures. *Phys. Rev. A*, 34, 1538-1549.
- [6] Knobloch E., Moore D.R., Toomre J. and Weiss N.O., 1986, Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 166, 409-448.
- [7] Knobloch E. and Moore D.R., 1990, Minimal model of binary fluid convection. *Phys. Rev. A*, 42, 4693-4709.
- [8] Landsberg A.S. and Knobloch E., 1996, Oscillatory bifurcation with broken translation symmetry. *Phys. Rev. E*, 53, 3579-3600.
- [9] Lerman K., Bodenschatz E., Cannell D.S. and Ahlers G., 1993, Transient localized states in 2D binary liquid convection. *Phys. Rev. Lett.*, 70(23), 3572-3575.
- [10] Liu M. and De Bruyn J. R., 1992, Traveling wave convection in a narrow rectangular cell. *Can. J. Phys.*, 70, 689-695.
- [11] Lücke, M., Barten, W., Büchel, P., Fütterer, C., Hollinger, C. and Jung, CH., 1998, Pattern formation in binary fluid convection and in systems with throughflow. In *Evolution of structures in dissipative continuous systems. Lecture Notes in Physics*, Edt. by F. H. Busse and S. C. Müller, Springer, 127-197.
- [12] Manneville P., 1990, *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic, San Diego.
- [13] Mercader I., Net M. and Knobloch E., 1995, Binary fluid convection in a cylinder. *Phys. Rev. E*, 51, 339-351.
- [14] Millour E., Tric E. and Labrosse G., The first non linear convective states and bifurcations of a confined binary liquid. submitted to *Eur. J. Mech. / B Fluids*

- [15] Moore D.R., Weiss N.O. and Wilkins J.M., 1991, Asymmetric oscillations in thermosolutal convection. *J. Fluid Mech.*, 233, 561-585.
- [16] Ohlsen D.R., Yamamoto S. Y., Surko C.M. and Kolodner P., 1990, Transition from nonlinear traveling waves to steady overturning convection in binary mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 65 (12), 1431-1434.
- [17] Ott E., 1993, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press.
- [18] Platten J. K. and Legros J. C., 1984, *Convections in liquids*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [19] Steinberg V., Moses E. and Fineberg J., 1987, Spatio-temporal complexity at the onset of convection in a binary fluid. *Nuclear Phys. B, Proc. Suppl.* 2, 109-124.
- [20] Swift J. W. and Wiesenfeld K., 1984, Suppression of period doubling in symmetric systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52 (9), 705-708.
- [21] Thurlow M.S., Brooks B.J., Lucas P.G.J., Ardron M.R., Bhattacharjee J.K. and Woodcraft A.L. 1996, Convective instability in rotating liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures, *J. Fluid Mech.*, 313, 381-407.
- [22] Wanschura M., Kuhlmann H.C. and Rath H.J., 1996, Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below, *J. Fluid Mech.*, 326, 399-415.

I	II	III	1 NS	$A = 3148.5$ $B = 3079.5$ $C = 3271.3$ $D = 3011.5$	$\frac{1}{2}$ NS	$A = 15167.8$ $B = 14717$ $C = 15797.1$ $D = 14938$	2 NS	$A = 2582.3$ $B = 2573.2$ $C = 2875.7$ $D = 2628.8$
$\frac{1}{2}$ FS								$A = 8412.7$ $B = 8349$ $C = 8948$ $D = 8116.8$
1 FS								$A = 2434.0$ $B = 2430.5$ $C = 2588.8$ $D = 2326.5$
2 FS								$A = 2327.1$ $B = 2326.5$ $C = 2551.9$ $D = 2215.7$

Table 1: Sketches of the three relative positioning of the conductive, oscillatory and steady convective states domains. Top row: Bifurcation diagrams corresponding to the three observed cases. The horizontal line depicts the rest state, ending at a subcritical Hopf bifurcation (A). The middle curve depicts time-dependent states bounded by a saddle-node bifurcation (B) and the transition to SOC (C). The upper curve depicts steady convective states, the lower boundary of which is a saddle-node (D).

$\Gamma$	NS	FS
$\frac{1}{2}$		
1		
2		

Table 2: Angular frequencies of obtained mono-periodic flows. Points T and C, when given, respectively indicate the occurrences of temporal symmetry breaking and transition to SOC (see text).

Case	T	$\frac{T-B}{C-B}$	$\frac{A-B}{C-B}$
$\frac{1}{2}$ (SF)	8900.5	0.921	0.106
1 (SF)	2577.9	0.931	0.0221
2 (SF)	2542.2	0.957	0.00266
$\frac{1}{2}$ (NS)	15619.7	0.836	0.417
1 (NS)	3260.3	0.943	0.360
2 (NS)	-	-	0.0301

Table 3: Rayleigh number values at which temporal symmetry  $\mathcal{T}$  is broken (second column), proportion of the oscillatory domain over which  $\mathcal{T}$  holds (third column) and over which both oscillatory and conductive states are stable (fourth column).

Period	$\Gamma = 1/2$	$\Gamma = 1$	$\Gamma = 2$
1	8932	2584	2549
2	8933		
2	8935	2584.5	
2	8937	2585	2550
2	8938	2585.5	2550.8
4	8938.5		
4	8939		2551
4	8939.5	2586	2551.2
8		2586.2	2551.25
32			2551.3
C2	8940	2586.5	2551.4

Table 4: Examples of results obtained at given  $Ra$  values relative to the period 2 based windows (C2 denotes period 2 based chaos).

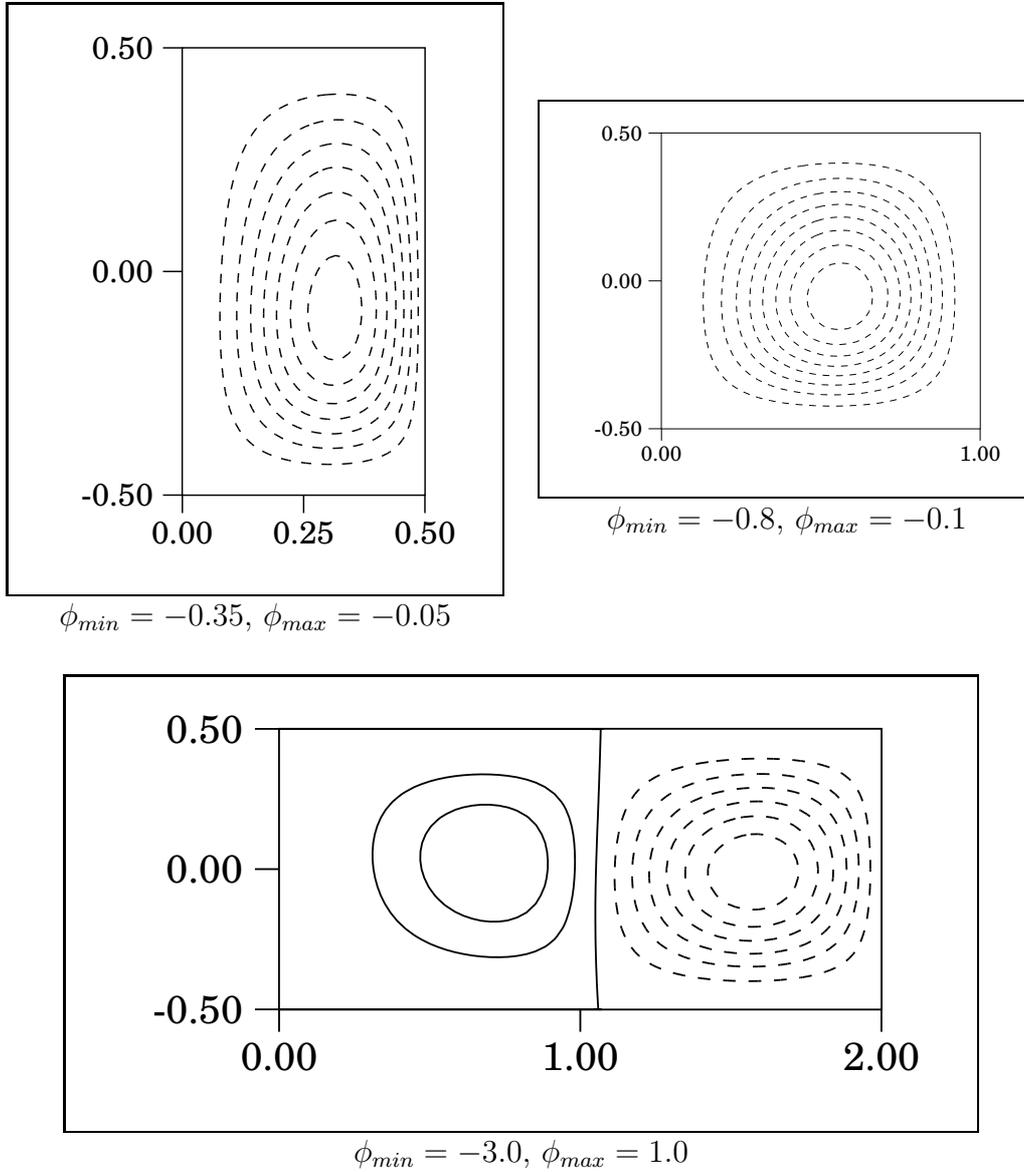


Figure 1: Streamfunction  $\phi$  contours of stationary flows for  $\Gamma = 1/2$  (FS configuration,  $Ra = 8600$ ),  $\Gamma = 1$  (NS configuration,  $Ra = 3300$ ) and  $\Gamma = 2$  (FS configuration,  $Ra = 2550$ ). Solid and dashed lines indicate positive and negative values (clockwise and anti-clockwise motion) of  $\phi$ ; Displayed contour levels are evenly distributed and range from  $\phi_{min}$  to  $\phi_{max}$ . Note that the rolls are not purely even in  $z$  and that applying the mirror symmetry  $\mathcal{M}$  to the streamfunction is equal to transforming  $\phi(r, z)$  into  $-\phi(r, -z)$ .

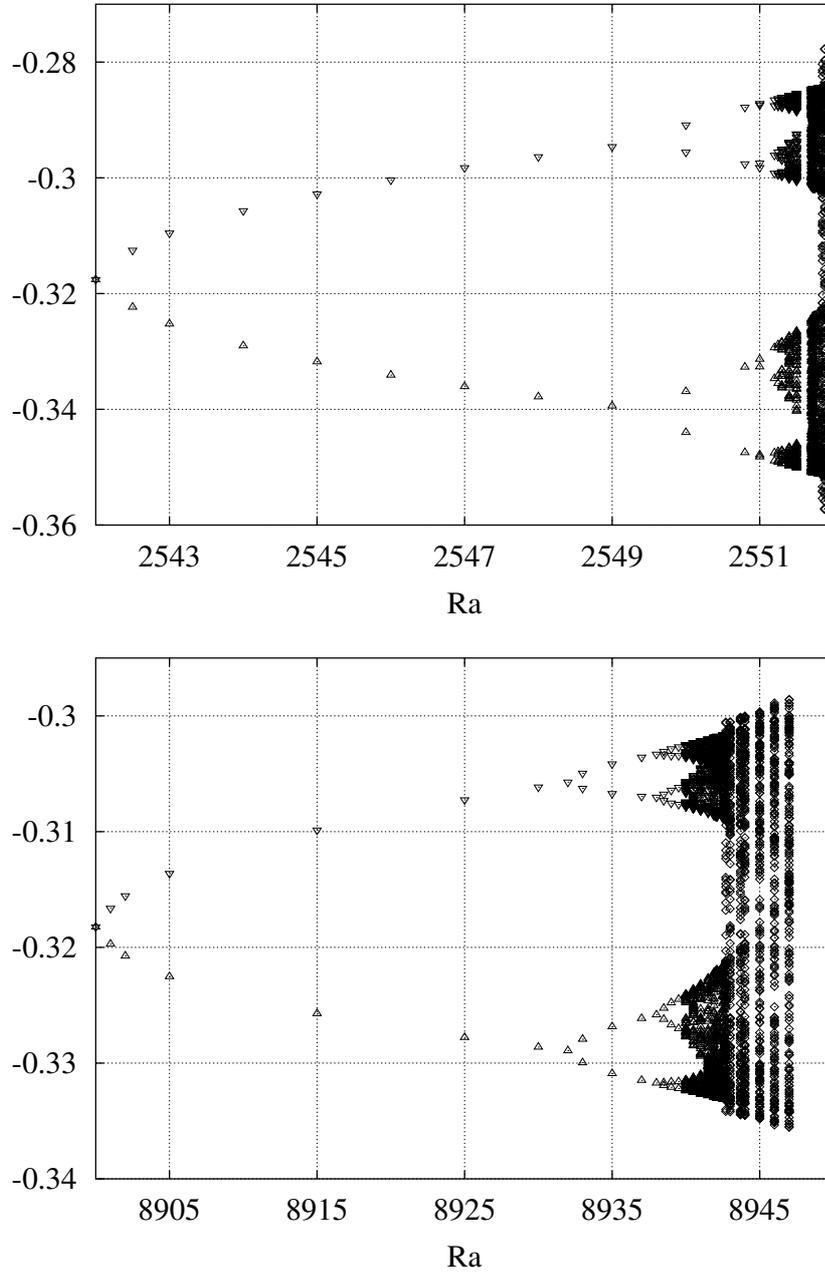


Figure 2: Bifurcation diagrams of the oscillatory states, starting from the temporal symmetry breaking up to the boundary-induced crisis (see text). Upward and downward triangles refer to the  $\mathcal{M}$ -related states before their merging into a single attractor (diamonds). The upper diagram is obtained for  $\Gamma = 2$  and the lower one with  $\Gamma = 1/2$ . For both diagrams, the values given on the ordinate are those of the concentration field  $\gamma$  in a Poincaré section (defined by  $u = 0$ , going from negative to positive values) at a given position ( $r = \Gamma/4$ ,  $z = -1/4$ ).

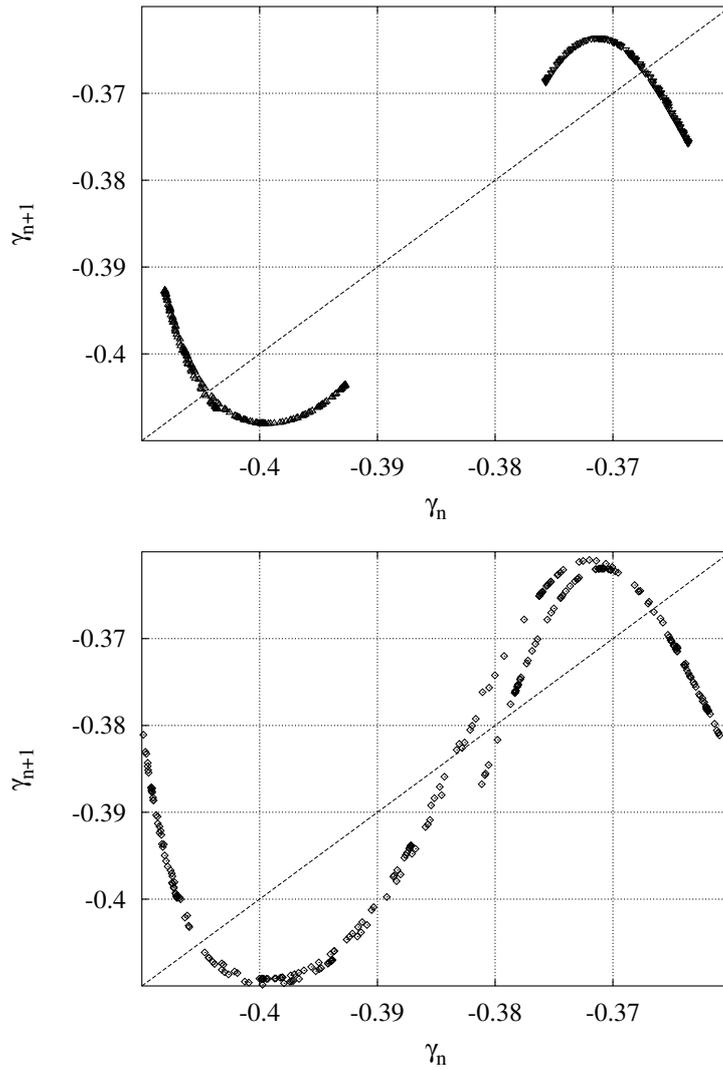


Figure 3:  $\gamma_{n+1}$  vs  $\gamma_n$  Poincaré section return map (from the  $\Gamma = 1$  case), displaying the attracting sets before (upwards and downwards triangles) and after (diamonds) the occurrence of crisis-induced intermittency.

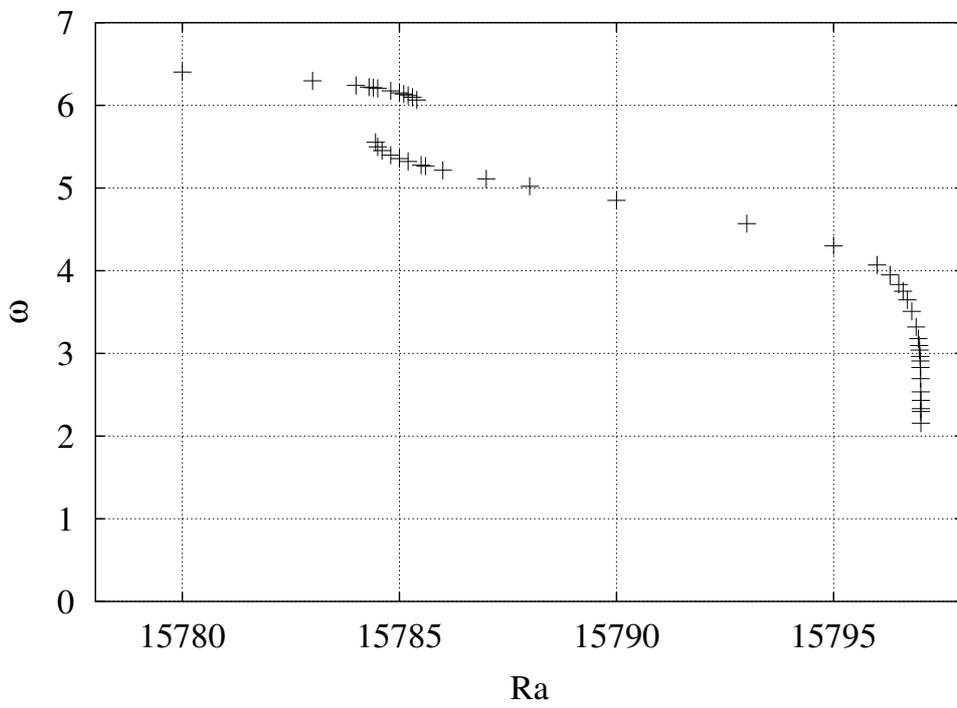


Figure 4: End of the oscillatory branch.  $\Gamma = 1/2$ , NS configuration.

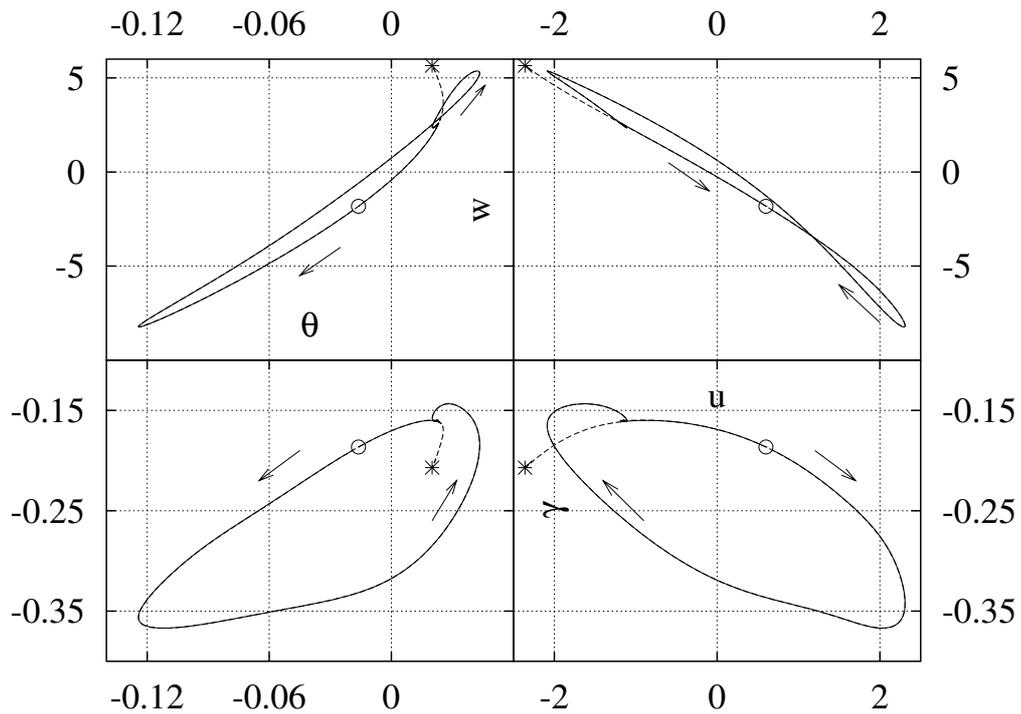


Figure 5: Projections of the phase portrait of the periodic orbit (full line) in the  $(\theta, \gamma)$ ,  $(u, \gamma)$ ,  $(u, w)$  and  $(\theta, w)$  planes, prior to the homoclinic bifurcation. The arrows indicate the direction of motion along the orbit. The large dot depicts the initial position of the system when  $Ra$  was increased beyond the threshold value. The path then followed by the system as it evolves toward the stable SOC fixed point (star) is given by the dashed line.

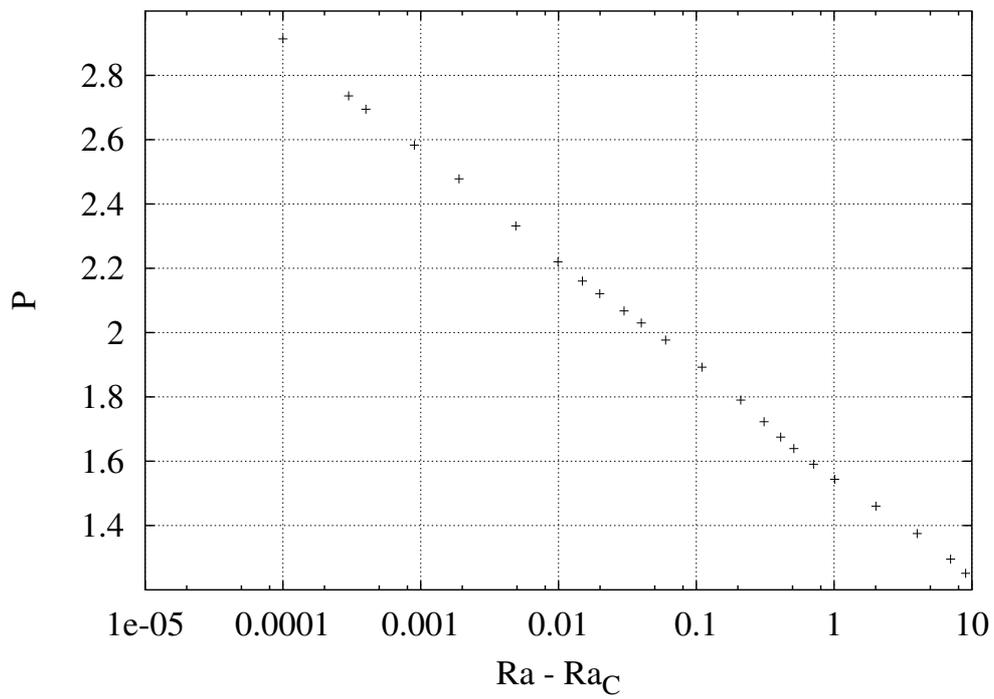


Figure 6: Period  $P$  of the oscillations versus the distance ( $Ra - Ra_C$ , where  $Ra_C \simeq 15797.0099$ ) to the homoclinic bifurcation of the periodic orbit ( $\Gamma = 1/2$ , NS configuration).

$Pr = 10, Le = 10^{-1}, \Psi = -0.2$				
Etat	Domaine en $Ra$		Transition vers l'état	
	début	fin	pour $Ra \searrow$	pour $Ra \nearrow$
cond		15601 $\omega_{Hopf} = 36.6$		sta
osc	14413	14870	cond	sta
sta	14090	124500	cond	osc <sub>2</sub>
$Pr = 1, Le = 10^{-1}, \Psi = -0.2$				
Etat	Domaine en $Ra$		Transition vers l'état	
	début	fin	pour $Ra \searrow$	pour $Ra \nearrow$
cond		15167.8 $\omega_{Hopf} = 28.84$		osc
osc	14717	15797.1	cond	sta
sta	14938	107700	osc	osc <sub>2</sub>

TAB. 6.1 – Récapitulatif des domaines d’existence des solutions et transitions entre ces dernières, pour les deux liquides binaires étudiés en configuration  $\Gamma = \frac{1}{2}$  “rigide”. Les bifurcations aux extrémités des branches sont les mêmes dans les deux cas (bifurcation sous-critique de Hopf de l’état conducteur, bifurcation homocline du cycle limite entraînant la transition vers le régime convectif stationnaire et une bifurcation noeud-col au début de chacune des branches osc et sta).

## 6.3 Influences des caractéristiques du liquide binaire sur les états du système

Les résultats de la section précédente présentent les nombreux effets significatifs qu’un changement de rapport d’aspect  $\Gamma$  ou de conditions aux limites peut induire sur les solutions du système. Cette étude de la sensibilité des solutions du système en fonction du confinement imposé à celui-ci n’a cependant été menée que dans le cadre d’un liquide binaire de propriétés données.

Quelques calculs complémentaires ont ainsi été menés, dans le cadre d’un cylindre de rapport d’aspect  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , mais pour des valeurs des nombres de Prandtl ou Lewis représentatifs des mélanges eau-éthanol ( $Pr \sim 10$  et  $Le \sim 10^{-2}$ ). Afin de pouvoir cerner les influences respectives des variations de ces deux paramètres, on étudie ici des cas où seul l’un des deux prend une valeur différente de celle du mélange étudié précédemment ( $Pr = 1, Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ).

### 6.3.1 Régimes convectifs pour $Pr = 10$ en configuration “rigide”

Les domaines sur lesquels s’étendent les branches de solutions lorsque  $Pr = 10$  sont résumées dans le tableau 6.1, conjointement à celles du cas  $Pr = 1$  pour faciliter toute comparaison.

Les conséquences générales induites par l’augmentation de la valeur du nombre de Prandtl sont les suivantes :

- La valeur seuil  $Ra_{Hopf}$  à laquelle a lieu la bifurcation sous-critique de Hopf marquant la déstabilisation de l’état conducteur est plus importante que lorsque  $Pr = 1$ . La pulsation associée  $\omega_{Hopf}$  (donnée dans le tableau) est de même plus importante. L’augmentation de ces deux valeurs avec celle de  $Pr$  est conforme aux résultats des études traitant de ce point

(présentés page 22 et suivantes).

- Les valeurs seuils des branches de solutions convectives sont plus faibles que lorsque  $Pr = 1$  (on ne discutera pas ici des écoulements et transitions ayant lieu aux valeurs importantes de  $Ra$ , l'étude de ces derniers étant le sujet du chapitre suivant). Ces évolutions se font donc dans le sens contraire de celles observées dans les systèmes latéralement périodiques Barten et al. (1995a), décrits page 29.

Cette diminution des valeurs seuils marquant les extrémités du domaine oscillant entraînent par ailleurs la différence la plus significative entre les deux systèmes : Lorsque  $Pr = 10$ , la branche des états oscillants n'existe que pour des valeurs de  $Ra$  inférieures à  $Ra_{Hopf}$ . De fait, lorsque le système quitte l'état conductif, il aboutit invariablement à la seule solution stable pour de telles valeurs de  $Ra$  : le régime de convection stationnaire. La branche des états stationnaires s'étend de plus jusqu'à des valeurs de  $Ra$  en deçà de celle marquant le début de la branche des états oscillants. Cette dernière se trouve ainsi de fait occultée puisqu'elle ne peut être atteinte qu'à travers l'application d'une perturbation de forte amplitude d'un état stationnaire ou conductif.

Une procédure plus sûre<sup>1</sup> de “continuation” a été employée pour atteindre la branche des solutions oscillantes : un écoulement périodique obtenu à  $Pr = 1$  a été pris comme condition initiale pour réaliser des calculs en faisant graduellement (et manuellement) évoluer les valeurs de  $Pr$  et  $Ra$  de façon à suivre la surface  $Pr$ - $Ra$  des états oscillants dans l'espace des paramètres.

Une fois atteinte, la branche des états oscillants à  $Pr = 10$  s'avère (en poursuivant la comparaison par rapport au cas  $Pr = 1$ ) telle que :

1. Les écoulements sont monopériodiques, de pulsation du même ordre et évoluant de même en fonction de  $Ra$  que ceux obtenus pour  $Pr = 1$  (figure 6.2).
2. En outre, identiquement au cas  $Pr = 1$ , la branche de ces solutions acquiert sa stabilité à une bifurcation noeud-col et s'achève par une bifurcation homocline.
3. Au début de la branche, les états possèdent la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$ . Celle-ci perdure jusqu'à  $Ra_{\mathcal{T}} = 14816$ . La proportion de la branche des états oscillants pour laquelle cette propriété est vérifiée est ainsi de 88.2%, ce qui est proche des 83.6% obtenus avec  $Pr = 1$ .
4. A la différence du cas  $Pr = 1$ , il n'y a apparemment pas de “torsion” de la branche des états oscillants. Il convient néanmoins de rester prudent sur ce résultat étant donné que moins de calculs ont été réalisés pour  $Pr = 10$  que  $Pr = 1$  et que dans ce dernier cas, ce phénomène est localisé sur un minuscule intervalle en  $Ra$ .

### 6.3.2 Régimes convectifs en configuration “libre”

Deux cas ont été étudiés en configuration  $\Gamma = \frac{1}{2}$  “libre”. Le premier poursuit l'étude du cas  $Pr = 10$  ( $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ) et le second est relatif à l'influence d'une diminution de la valeur du nombre de Lewis, ce dernier étant fixé à  $Le = 3 \cdot 10^{-2}$  (avec à nouveau  $Pr = 1$  et  $\Psi = -0.2$ ).

---

<sup>1</sup>L'utilisation de perturbation d'amplitude finie pose en premier lieu le problème du choix de celle-ci. A supposer cette difficulté surmontée, il reste alors le problème de l'appliquer aux “bonnes” valeurs des paramètres (c.à.d. celle pour lesquelles l'état recherché existe), ce qui fait de cette méthode un outil de prospection peu adéquat.

$Pr = 10, Le = 10^{-1}, \Psi = -0.2$				
Etat	Domaine en $Ra$		Transition vers l'état	
	début	fin	pour $Ra \searrow$	pour $Ra \nearrow$
cond		8542 $\omega_{Hopf} = 33.67$		sta
osc	8168	8403	cond	sta
sta	7857	? $> 2.10^5$	cond	
$Pr = 1, Le = 10^{-1}, \Psi = -0.2$				
Etat	Domaine en $Ra$		Transition vers l'état	
	début	fin	pour $Ra \searrow$	pour $Ra \nearrow$
cond		8412.7 $\omega_{Hopf} = 24.87$		osc
osc	8349	8948	cond	sta
sta	8116.8	? $> 3.10^5$	cond	
$Pr = 1, Le = 3 \cdot 10^{-2}, \Psi = -0.2$				
Etat	Domaine en $Ra$		Transition vers l'état	
	début	fin	pour $Ra \searrow$	pour $Ra \nearrow$
cond		7425 $\omega_{Hopf} = 24.22$		osc
osc	7345	7647	cond	sta
sta	7264	? $> 8000$	cond	

TAB. 6.2 – Récapitulatif des domaines d'existence des solutions et transitions entre ces dernières, pour les trois mélanges binaires étudiés en configuration  $\Gamma = \frac{1}{2}$  “libre”. Pour ces trois systèmes, l'état conductif devient instable via une bifurcation de Hopf sous-critique et chacune des branches des états convectifs stationnaires et oscillants débute à une bifurcation noeud-col.

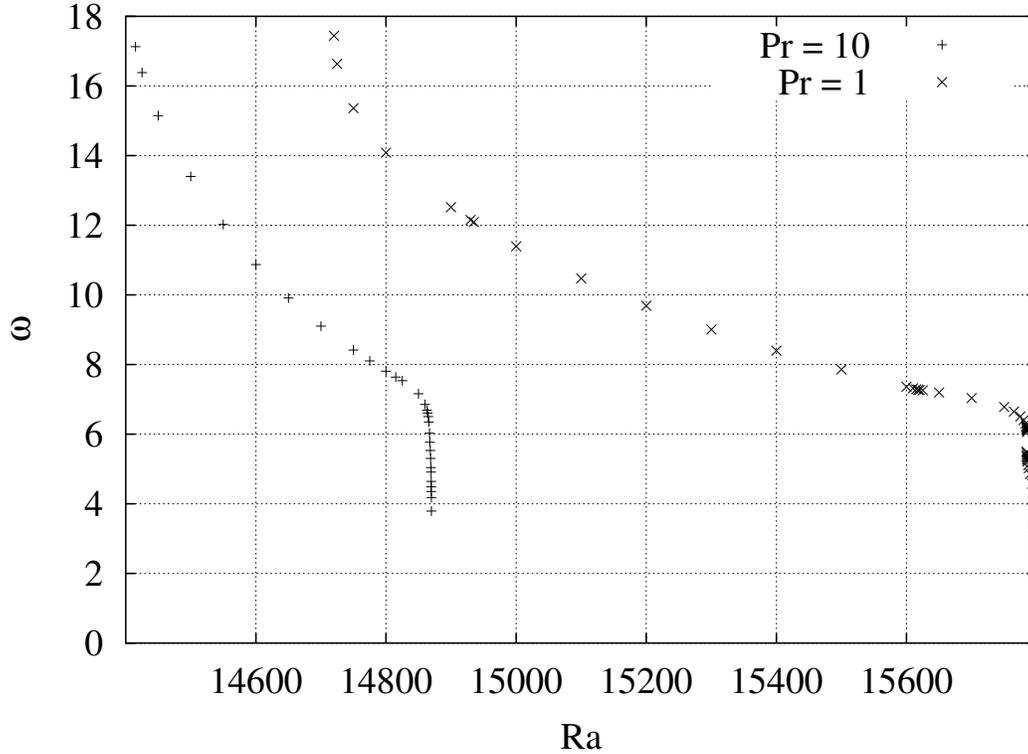


FIG. 6.2 – Pulsation des états oscillants de liquides binaires de nombre de Prandtl différents (avec  $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ).  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , configuration “rigide”.

Les diverses branches de solutions et domaines sur lesquels elles s’étendent sont présentés conjointement dans le tableau 6.2.

Les tendances générales induites par la multiplication de la valeur de  $Pr$  par 10 observées en configuration “rigide” se retrouvent dans le cas présent. On constate ainsi :

- Une augmentation de la valeur seuil  $Ra_{Hopf}$  et de la pulsation  $\omega_{Hopf}$  associée.
- Une diminution des valeurs seuils des états convectifs. A nouveau, la branche des états oscillants s’étend sur un domaine en  $Ra$  en deçà de  $Ra_{Hopf}$  et au delà de celle marquant l’émergence des solutions stationnaires.

L’augmentation de la valeur de  $Pr$  entraîne une forte diminution de l’intervalle en  $Ra$  sur lequel les solutions oscillantes existent, ainsi qu’une légère diminution de l’intervalle en pulsation (figure 6.3) décrit par celles-ci. Hormis ces différences quantitatives, les propriétés des écoulements instationnaires pour  $Pr = 10$  s’avèrent identiques à celles du cas  $Pr = 1$ . La brisure de la symétrie temporelle  $\mathcal{T}$  intervient à  $Ra_T = 8377.5$ . La proportion de la branche possédant cette symétrie est ainsi de 89.1%, soit un peu moins que les 92.1% obtenus lorsque  $Pr = 1$ . Au delà de cette première bifurcation, on retrouve toute la séquence de bifurcations observées pour  $Pr = 1$ , jusqu’à la crise de frontière entraînant la transition vers les régimes de convection stationnaire. Cette similitude est illustrée par le diagramme de bifurcation de la figure 6.4. La variable représentée ( $\gamma$ ) et la section de Poincaré utilisée sont celles employées dans la description du cas  $Pr = 1$ .

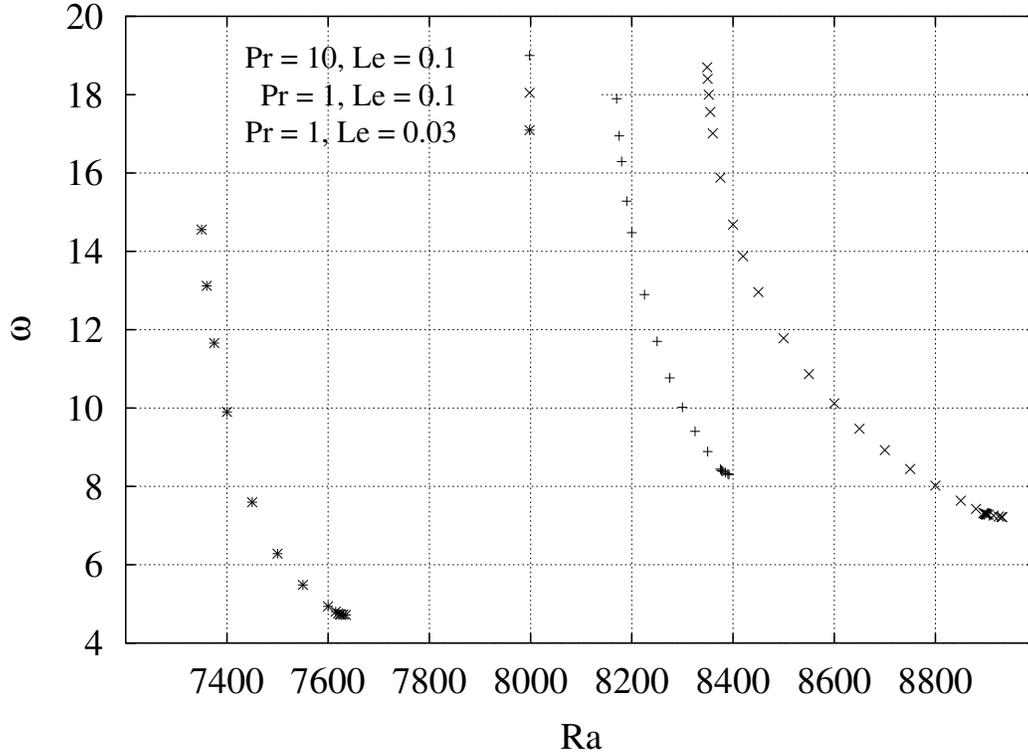


FIG. 6.3 – Pulsation des états oscillants des trois sortes de liquides binaires étudiés en configuration  $\Gamma = \frac{1}{2}$  “libre”.

La diminution de la valeur du nombre de Lewis de  $Le = 10^{-1}$  à  $3 \cdot 10^{-2}$  entraîne pour sa part les conséquences suivantes :

- Une forte diminution la valeur seuil  $Ra_{Hopf}$  de l’état conductif accompagnée d’une légère baisse de la pulsation associée.
- De même, la diminution du nombre de Lewis engendre celle des valeurs seuils des états convectifs.

La taille du domaine oscillant pour  $Le = 3 \cdot 10^{-2}$  se trouve ainsi réduite par rapport à celle du cas  $Le = 10^{-1}$ , effet inverse de celui observé par Barten et al. (1995a). L’intervalle des pulsations couvert par les oscillations monopériodiques n’en est cependant que faiblement affecté (figure 6.3). Les diminutions des seuils implique d’autre part que la proportion de la branche des états oscillants se situant en deçà de  $Ra_{Hopf}$  monte à 26.5%, soit plus du double des 10.6% observés pour  $Le = 10^{-1}$ .

La réduction de  $Le$  n’induit aucun changement qualitatif des propriétés des solutions oscillantes. On observe de nouveau la séquence de bifurcations (le diagramme correspondant est donné dans la figure 6.4) obtenue dans les cas précédents. La brisure de la propriété de symétrie  $\mathcal{T}$  a lieu à  $Ra = 7622$ . En conséquence, la proportion des écoulements possédant cette symétrie est plus importante lorsque  $Le = 3 \cdot 10^{-2}$  que avec  $Le = 10^{-1}$  (respectivement 91.7% et 83.6%).

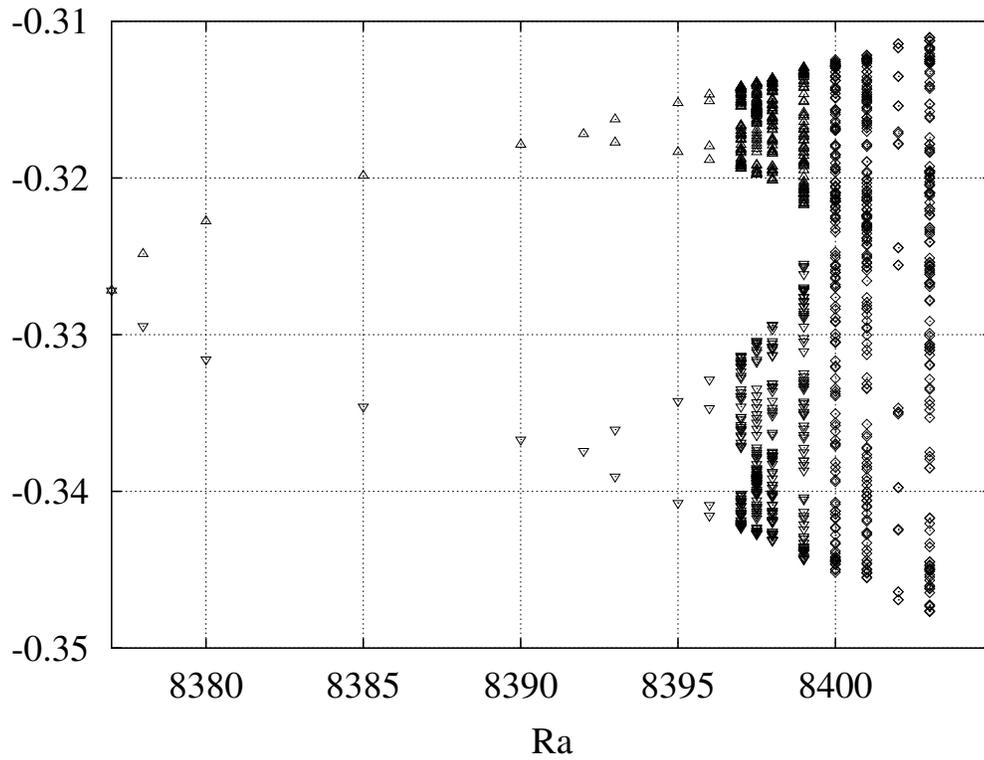
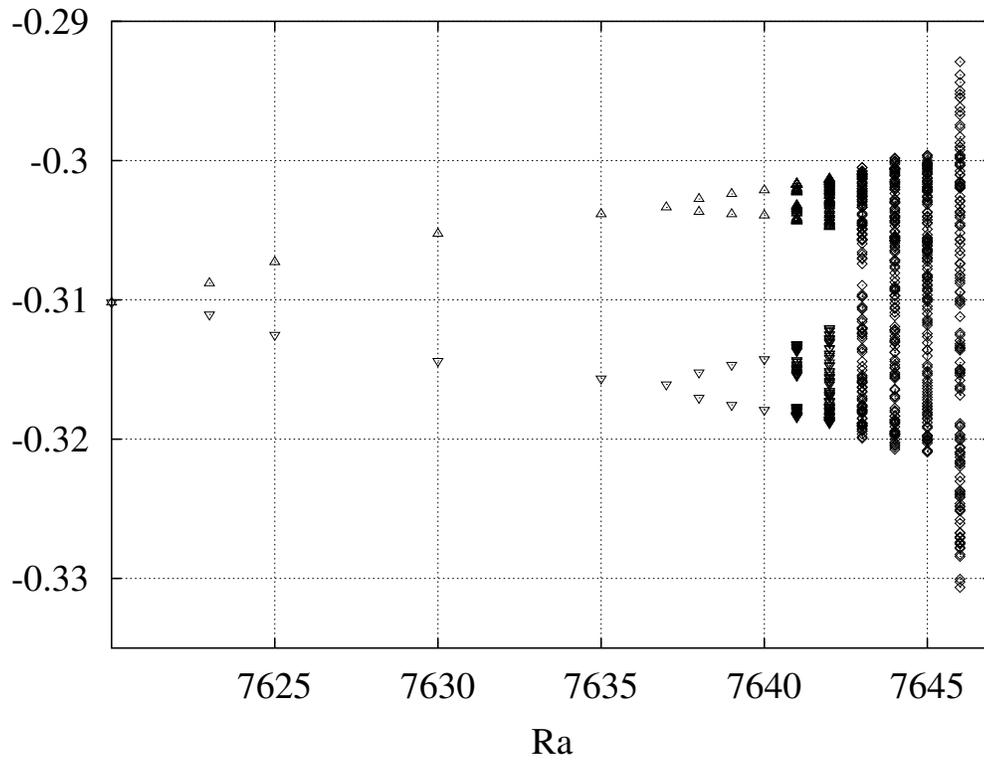


FIG. 6.4 – Diagrammes de bifurcations (valeurs de  $\gamma$  dans la coupe de Poincaré) obtenus en configuration  $\Gamma = \frac{1}{2}$  “libre”. Haut :  $Pr = 1$ ,  $Le = 3 \cdot 10^{-2}$  et  $\Psi = -0.2$ . Bas :  $Pr = 10$ ,  $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ .

### 6.3.3 Récapitulatif

Etant donné que les caractéristiques d'un fluide binaire sont données par un triplet de valeurs de  $Pr$ ,  $Le$  et  $\Psi$ , les résultats présentés ci-dessus ne sont qu'autant d'incursions dans l'espace de ces paramètres. Il est évident que, bien que loin d'être suffisants pour donner une vue d'ensemble du comportement du système dans cet espace, ils en illustrent néanmoins quelques propriétés.

Par rapport au liquide de référence ( $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ), représentatif d'un mélange He<sup>3</sup>-He<sup>4</sup>, les investigations menées pour  $Pr = 10$  ou  $Le = 3 \cdot 10^{-2}$  mettent en évidence les tendances suivantes :

- L'augmentation de  $Pr$  et la diminution de  $Le$  entraînent des réductions des valeurs seuils des solutions convectives. Dans les deux cas ceci engendre une diminution de l'étendue (en  $Ra$ ) du domaine d'existence des régimes convectifs instationnaires.
- Lorsque la valeur de  $Pr$  est multipliée par 10, le domaine d'existence des états oscillants se situe en deçà de la bifurcation de Hopf de l'état conductif et au delà du début de la branche des états stationnaires.
- Les propriétés des solutions oscillantes et bifurcations associées ne sont pas qualitativement altérées par les variations de  $Pr$  et  $Le$ .

# Chapitre 7

## Comportements convectifs à grand nombre de Rayleigh

### 7.1 Introduction

Cette partie est principalement consacrée à l'étude (pour  $\Gamma = \frac{1}{2}$ ) de l'influence de l'effet Soret sur la convection de fluides binaires à haut nombre de Rayleigh. Il n'existe presque pas d'études sur ce sujet dans la littérature, dans la mesure où il est généralement admis que lorsque le nombre de  $Ra$  est grand, les vitesses de convection sont importantes et le liquide binaire est alors "parfaitement mélangé". Son comportement doit en conséquence, rejoindre celui d'un fluide pur dans les mêmes conditions (voir néanmoins la discussion page 31 à ce sujet).

La présente étude montre que cela n'est pas toujours le cas. La comparaison entre les écoulements convectifs de fluides purs et de liquides binaires pour  $Pr = 1$  ( $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ) montre qu'il n'y a comportement identique à haut  $Ra$  que dans le cas où la paroi latérale est prise comme étant une surface libre (configuration "libre"). Lorsque l'adhérence à cette paroi est imposée (configuration "rigide"), nombre de différences significatives entre les deux systèmes fluides apparaissent.

En analysant plus précisément les écoulements convectifs stationnaires de l'un et l'autre cas, on peut remonter au mécanisme physique à l'origine de leurs disparités. Ce mécanisme permet de plus de comprendre pourquoi il y a des différences entre les états convectifs de fluides purs et de liquides binaires lorsqu'est imposée la condition d'adhérence mais pas lorsqu'il s'agit d'une condition de glissement.

Par ailleurs, des calculs complémentaires réalisés pour  $Pr = 10$  (les valeurs de  $Le$  et  $\Psi$  restant inchangées), mènent à des résultats similaires. La récurrence de ce mécanisme tend ainsi à montrer que celui-ci est de portée assez générale (du moins valide vis-à-vis d'éventuelles variations de  $Pr$ ).

L'ensemble de ces résultats a mené à un article en phase finale de rédaction intitulé "Axisymmetric convective states of pure and binary liquids enclosed in a vertical cylinder and boundary conditions' influence thereupon", qui est présenté dans les pages (146-180) suivantes.

## 7.2 Régimes convectif de fluides purs et liquides binaires

Selon les configurations, les calculs ont été menés jusqu'à des valeurs de  $Ra$  atteignant  $2 \cdot 10^5$  ou  $3 \cdot 10^5$ . Rappelons, pour fixer les idées sur ces ordres de grandeur, que dans les études présentées dans les chapitres précédents, les valeurs de  $Ra$  abordées ne dépassaient généralement pas deux fois la valeur critique de l'état conductif. On convient donc de parler de "hauts" nombres de Rayleigh dès que  $Ra$  est au moins trois fois supérieur à la valeur seuil de l'état conductif du fluide considéré.

### 7.2.1 Ecoulements pour $Pr = 1$ en configuration "libre"

Les états stables des deux systèmes fluides, ainsi que leurs domaines d'existence sont résumés dans le tableau 1, page 162.

Dans le cas d'un fluide pur, l'évolution du système est directe et sans surprise : un écoulement convectif stationnaire émerge suite à la bifurcation fourche de l'état conductif. Ce régime de convection stationnaire persiste de plus sur toute la gamme de valeurs de  $Ra$  étudiée. On observe de même que pour un liquide binaire, la branche des états stationnaires obtenue à bas  $Ra$  se prolonge au moins jusqu'à  $Ra = 3 \cdot 10^5$ .

Les écoulements stationnaires obtenus pour l'un ou l'autre des fluides s'avèrent de plus d'autant plus similaires que la valeur de  $Ra$  est importante. On obtient ainsi rapidement des écoulements présentant des distributions de fonction de courant et champs de température<sup>1</sup> identiques, comme le montrent les figures 1 (page 164, fluide pur à  $Ra = 2 \cdot 10^5$ ) et 2 (page 165, liquide binaire à  $Ra = 2 \cdot 10^5$ ). Cette forte similitude entre les deux systèmes se retrouve dès  $Ra \sim 1.5 \cdot 10^3$  (de l'ordre de trois fois la valeur seuil de l'apparition du régime convectif). Ceci est en outre illustré dans la figure 3 (page 166) où sont représentées les énergies cinétiques globales  $E_k$  des écoulements. Cette énergie est définie par l'intégration (sur le volume du cylindre) suivante :

$$E_k = \int \int_{\Omega} \int \frac{v^2}{2} d\Sigma$$

Pour comprendre ce qui rend les écoulements purs et binaires à ce point similaire, il faut s'intéresser aux distributions des champs de température et concentration de ces derniers (tels que ceux présentés dans la figure 2, page 165). En dehors des couches limites, températures et concentrations sont fortement homogénéisées par la convection. Etant donné que l'effet Soret crée un gradient de fraction massique en réponse à un gradient thermique et que ce dernier se trouve dans le cas présent très faible, on comprend que le liquide binaire se comporte comme s'il n'existait pas d'effet Soret, donc comme un fluide pur dans les mêmes conditions.

Le cas présent est donc de ceux où le fait que le liquide considéré soit binaire ou non n'a pas d'incidence sur son comportement convectif à hauts nombres de Rayleigh.

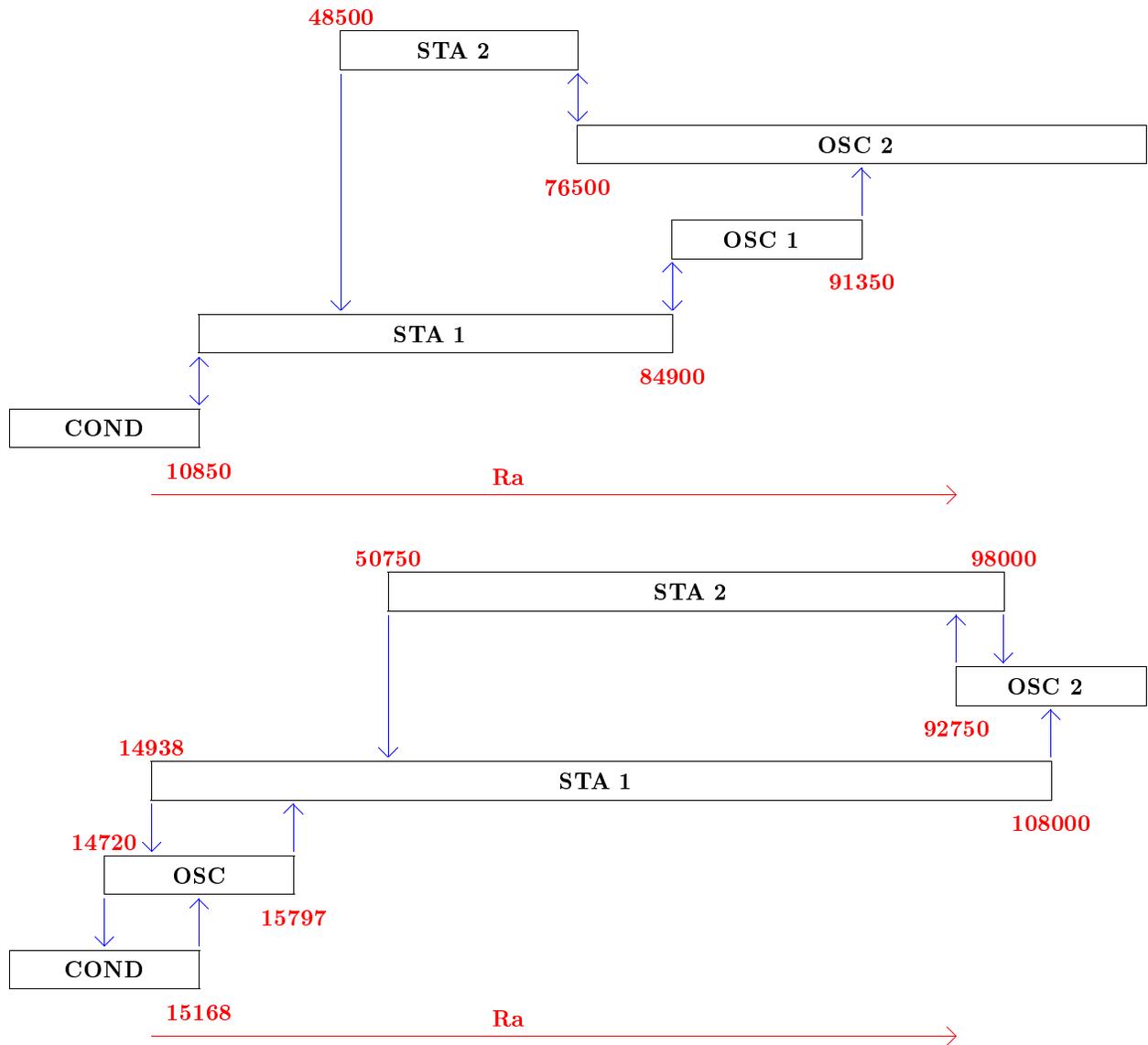


FIG. 7.1 – Résumé des branches de solutions pour un fluide pur (haut) et un liquide binaire (bas), pour  $Pr = 1$  ( $Le = 10^{-1}$ ,  $\Psi = -0.2$ ). Les transitions d’un état à l’autre dues aux variations de  $Ra$  sont indiquées par les flèches.  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , configuration “rigide”.

## 7.2.2 Caractéristiques générales des solutions en configuration “rigide” à $Pr = 1$

La configuration “rigide” s’avère bien plus riche en comportements dynamiques que la précédente. On se trouve en effet dans une situation telle que d’une part des solutions oscillantes apparaissent et d’autre part l’écoulement peut s’organiser suivant deux type de structures spatiales distinctes. Par cette dernière remarque, on entend le fait que l’écoulement puisse se composer d’une unique cellule (comme ceux obtenus dans la configuration “libre”) ou d’une paire de cellules contra-rotatives,

<sup>1</sup>Dans ce chapitre, contrairement aux précédents, on discutera et montrera les champs de température et fraction massique totaux (les contributions dues aux états conductifs sont incluses).

empilées l'une sur l'autre. Une illustration d'un régime convectif stationnaire de ce type est donné en figure 4, page 167. Ces solutions sont parfaitement symétriques par rapport au plan médian  $z = 0$  (et conséquemment invariantes vis-à-vis de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$ ).

Les domaines d'existence des états stables des deux systèmes fluides sont résumés dans la figure 7.1 (voir aussi la figure 5 page 168). Les transitions entre solutions et valeurs seuils associées sont données dans le tableau 2, page 162. Les états sont référencés par des indices relatifs à leurs structures spatiales (1 pour les cas unicellulaires et 2 pour les cas bicellulaires). Les principales différences entre les états obtenus dans le cas du liquide binaire et ceux du fluide pur sont les suivantes :

- Chacun des états convectifs obtenu par l'étude du cas d'un fluide binaire peut être relié à un régime de même type existant dans le cas d'un fluide pur. Une exception est cependant donné par les états oscillants  $osc_1$  qui existent sur des domaines de  $Ra$  très différents selon les cas.
- La branche  $osc_1$  mise à part, toutes les valeurs seuils sont plus élevées dans le cas du liquide binaire que dans celui du fluide pur, ce qui est en accord avec le fait d'étudier un système pour lequel l'effet Soret est stabilisant.
- Dans le cas du fluide pur, les transitions entre états stationnaires et oscillatoires de même structure sont directes (les bifurcations sont super-critiques), tandis que pour le liquide binaire, toutes les transitions sont source d'hystérésis.

### 7.2.3 Etats et transitions pour un fluide pur

Ainsi que l'indiquent les valeurs du tableau 2 (page 162), l'écoulement stationnaire  $sta_1$  disparaît au profit d'un état oscillant  $osc_1$  pour  $Ra = 84903$ . La branche  $osc_1$  s'étend jusqu'à  $Ra = 91350$  où elle se termine par une bifurcation noeud-col. Le système se retrouve alors sur le seul état stable à ces valeurs de  $Ra$ , le régime oscillant  $osc_2$ . Cet état est une version oscillante du régime stationnaire  $sta_2$  présenté précédemment (figure 4, page 167) : Au cours de la première demi-période, un des rouleaux s'étend, jusqu'à remplir une bonne partie de la cavité puis reprend ses position et forme initiales. Le deuxième rouleau évolue de même sur la deuxième moitié du cycle.

L'état  $osc_2$  existe au moins jusqu'à  $Ra = 2 \cdot 10^5$  et s'étend jusqu'à  $Ra = 76500$ . Les fréquences et amplitudes des oscillations décroissent avec  $Ra$  (une description plus complète de ces aspects est donnée en fin de ce chapitre, page 181). Lorsque la valeur seuil est atteinte, l'amplitude des oscillations devient nulle et l'écoulement stationnaire (état  $sta_2$ ). Ces deux régimes sont bien évidemment liés par une bifurcation de Hopf super-critique. La branche  $sta_2$  peut être suivie à  $Ra$  décroissants, jusqu'à  $Ra = 48500$  où elle s'achève par une bifurcation noeud-col.

#### Fin de la branche $sta_1$ pour un fluide pur

Les écoulements unicellulaires de la branche  $sta_1$  sont semblables à ceux obtenus en configuration "libre". Contrairement à ces derniers, les écoulements en configuration "rigide" se composent d'une cellule de convection principale et de petites recirculations localisées dans les "coins" (aux jonctions entre les parois horizontales et la paroi verticale) de la cavité. Ces recirculations, bien qu'alors de très faible taille et amplitude, sont présentes dès le début de la branche à faibles valeurs de  $Ra$ .

Lorsque  $Ra$  augmente, il en va de même pour la taille de l'une de ces recirculations (celle qui se trouve la plus éloignée du coeur de la cellule principale), ainsi que le montrent les fonctions de courants présentées dans les figures 6 et 7, pages 169 et 170. Lorsque la valeur critique  $Ra_h = 84903$  est franchie, le système devient oscillant. Un exemple de l'évolution temporelle au voisinage de la transition est donné en figure 8, page 171. Ces oscillations basse fréquence se résument à une suite alternant des phases d'évolutions lentes et rapides, les évolutions lentes correspondant à deux états quasi-stationnaires (réminiscent de la paire de solutions  $sta_1$ ). L'évolution du système lors du basculement de l'un à l'autre est illustrée dans les figures 9 et 10, pages 172 et 173. Ces états oscillants possèdent la propriété de symétrie temporelle  $\mathcal{T}$ .

Une transition identique entre régimes de convections stationnaires et oscillants a été observée par Tuckerman & Barkley (1988); Barkley & Tuckerman (1989), dans la cadre d'une investigation numérique des états convectifs axisymétriques d'un fluide pur dans un cylindre de rapport d'aspect  $\Gamma = 5$ . Ces travaux ont de plus identifié la bifurcation globale à l'origine de cette transition. Le scénario décrivant l'apparition de cette dernière, qui s'applique intégralement au cas présent, est présenté dans la figure 11, page 174. Pour  $Ra < Ra_h$ , deux paires de solutions stationnaires stables (cercles pleins) et instables (cercles creux) coexistent dans l'espace des phases. Lorsque  $Ra$  tend vers  $Ra_h$ , états stables et instables se rapprochent et coalescent (dans une bifurcation noeud-col) à  $Ra = Ra_h$ . Le cycle hétérocline reliant ces quatre solutions devient le cycle limite de l'état  $osc_1$  pour  $Ra > Ra_h$ .

Bien qu'un tel scénario repose sur l'existence d'une paire de solutions instables que l'on ne peut directement calculer (du moins avec les outils numériques employés ici), plusieurs résultats indirects permettent de montrer qu'il ne peut en être autrement :

1. La transition est directe (il n'y a pas d'hystérésis entre les solutions  $sta_1$  et  $osc_1$ ).
2. La pulsation de l'oscillation tend vers zéro à l'approche de la bifurcation, proportionnellement à  $\sqrt{Ra - Ra_h}$  (cette tendance est en outre visible dans la figure 7.2, page 181).
3. Les taux de croissance  $\lambda(Ra)$  de perturbations autour des états  $sta_1$  au voisinage de  $Ra_h$  suivent le comportement  $\lambda \propto \sqrt{Ra_h - Ra}$  attendu à l'approche d'une bifurcation noeud-col.

#### 7.2.4 Etats et transitions pour un liquide binaire

Ainsi qu'indiqué dans le tableau 2 (page 162), l'état  $sta_1$  existe jusqu'à  $Ra = 107700$ . Au delà de cette valeur, l'écoulement est déstabilisé par la croissance d'une recirculation dans un processus similaire à celui observé dans le cas du fluide pur. Cette déstabilisation ne mène cependant pas à un état oscillant du type de celui observé pour ce dernier. Pour le liquide binaire la déstabilisation de l'état  $sta_1$  entraîne une évolution du système vers la branche des états oscillants  $osc_2$ . Ces derniers sont similaires à ceux observés dans le cas du fluide pur et s'avèrent de même stable pour des valeurs de  $Ra$  allant au moins jusqu'à  $2 \cdot 10^5$ . La branche  $osc_2$  peut être redescendue jusqu'à  $Ra = 92750$  où elle se termine par une bifurcation noeud-col et l'écoulement aboutit sur la branche des états stationnaires  $sta_2$ . Si  $Ra$  est alors augmenté, on trouve que ces états sont stables jusqu'à  $Ra = 98000$  où une bifurcation de Hopf sous-critique (rappelons qu'on observe une bifurcation de Hopf super-critique dans le cas du fluide pur) a lieu et ramène le système sur la branche  $osc_2$ . La branche  $sta_2$  peut être descendue jusqu'à  $Ra = 50750$  où elle s'interrompt à une bifurcation noeud-col.

## Fin de la branche $sta_1$ pour un liquide binaire

L'énergie cinétique globale des systèmes stationnaires des deux fluides est présentée dans la figure 5, page 168. On constate que les énergies sont similaires pour  $Ra \in [30000; 70000]$ . Sur cet intervalle, les champs de l'un et l'autre sont en outre très semblables. Les différences entre les deux systèmes au delà de cet intervalle résultent du fait que le développement de la recirculation avec l'augmentation de  $Ra$  est moins importante dans le cas du liquide binaire.

Cette observation mène à comparer les champs obtenus dans l'un et l'autre des deux cas non plus à une même valeur de  $Ra$ , mais pour une "distance à la bifurcation" équivalente. Sous cet angle, les écoulements sont alors très similaires, comme le montrent les champs obtenus pour le liquide binaire à  $Ra = 107500$  (une valeur très proche de la transition) donnés dans la figure 12, page 175 ; à comparer avec ceux du fluide pur ( $Ra = 84900$ , valeur de même très proche de la transition) donnés dans la figure 7, page 170.

Les états  $sta_1$  du liquide binaire, bien que montrant d'importantes similitudes avec ceux obtenus pour le fluide pur, ne mènent cependant pas à l'apparition d'un état oscillant de type  $osc_1$  (ainsi que le suggéreraient les résultats précédents). En fait, la différence essentielle entre les solutions des deux systèmes fluides se trouve dans leurs propriétés et comportements dynamiques. On observe en effet que les comportements transitoires asymptotiques de relaxation vers les états stationnaires  $sta_1$  du liquide binaire se résument à une oscillation exponentiellement amortie (donc de la forme  $e^{\lambda t} \cos \omega t$ ). Ceci montre clairement que les points fixes  $sta_1$  sont des points spiraux (ou foyers). De plus, au voisinage de la valeur critique  $Ra_c$  marquant la fin de la branche de ces solutions, les taux de croissance  $\lambda(Ra)$  sont proportionnels à l'écart au seuil ( $Ra_c - Ra$ ). Les états  $sta_1$  deviennent donc instables via une bifurcation de Hopf sous-critique.

Bien que le fait que les points fixes  $sta_1$  des deux systèmes fluides soient de types différents explique la disparité entre les transitions observées dans chacun des cas, ce résultat n'indique cependant pas les raisons physiques pour lesquelles ces états stationnaires deviennent instables. Afin de clarifier ce dernier point, une analyse plus quantitative de ces solutions a été menée et est présentée dans les paragraphes suivants.

### 7.2.5 Comparaison entre les états $sta_1$ des deux fluides

Dans les deux cas la déstabilisation de l'état stationnaire est liée à la croissance de la recirculation. En outre, la zone sur laquelle s'étend cette dernière est, ainsi que le montrent toutes les figures présentant les écoulements dans la cavité, une région où les profils de température et de fraction massique varient principalement suivant la direction verticale. Les caractéristiques principales de l'évolution du système doivent donc en particulier se retrouver le long de la paroi verticale du cylindre, ce qui permet d'y restreindre l'étude.

On obtient alors le résultat suivant : la distribution de la température le long de la paroi ne varie que très peu sur le domaine de  $Ra$  pour lequel il y a une croissance significative de la recirculation, ainsi que le montrent les profils donnés dans la figure 13 (page 176). Sur cette même figure sont aussi donnés les profils "équivalents"  $T + \Psi C$  obtenus pour le liquide binaire. De même que dans le cas du fluide pur, ces derniers n'évoluent que très peu en fonction de  $Ra$ . A partir de ces résultats, on peut donc estimer que dans les deux cas les gradients de "densité"

sont en première approximation constants sur  $z \in [0.2, 0.5]$ .<sup>2</sup> Sachant que de plus que les vitesses au sein de la recirculation sont faibles, on les considérera comme négligeables. Outre ces deux hypothèses, on prend en compte les faits suivants :

1. La taille de la recirculation croît avec  $Ra$ .
2. La recirculation, quelque soit sa taille, est toujours située dans la région où les gradients de  $T + \Psi C$  sont constants, comme le montrent les résultats donnés dans la figure 14 (page 177).

Le mécanisme physique responsable de la déstabilisation des états  $sta_1$  devient alors clair : La région occupée par la recirculation est en première approximation dans un état conductif (vitesses nulles et gradients verticaux de densité déstabilisants). On pourrait donc construire un nombre de Rayleigh local  $Ra_*$ , basé sur la hauteur de la région quasi-conductive et du gradient thermique vertical qui y règne. Lorsque  $Ra$  augmente, la hauteur de la couche quasi-conductive augmente, donc  $Ra_*$  aussi. Au delà d'une certaine hauteur limite de la couche (donc pour  $Ra_*$  excédant une valeur critique), celle-ci devient instable, ce qui entraîne le développement brutal de la recirculation déstabilisant l'écoulement stationnaire  $sta_1$ .

Ce mécanisme, dans la mesure où il relie les propriétés des écoulements stationnaires à celles des états conductifs, mène à des interprétations complémentaires des résultats suivants :

- Les états  $sta_1$  obtenus pour le fluide pur et le liquide binaire en configuration “libre” restent stables pour toute valeur de  $Ra$ . Pour cette configuration, la condition de glissement sur la paroi latérale permet à la cellule principale de longer celle-ci. En conséquence, aucune recirculation ne peut se développer dans les “coins” du cylindre.
- L'écoulement  $sta_1$  du liquide binaire devient instable à des valeurs de  $Ra$  plus grandes que celles du fluide pur. Ceci est de toute évidence dû à l'effet Soret qui, de même qu'il retarde l'apparition de la convection de l'état conductif du liquide binaire par rapport à celle du fluide pur, stabilise la zone quasi-conductive et retarde ainsi sa croissance. Il semble donc que ce résultat soit quantitatif, notamment vis-à-vis des variations de la valeur de  $\psi$  : La déstabilisation de l'état stationnaire  $sta_1$  aurait ainsi lieu pour des valeurs de  $Ra$  d'autant plus grandes (petites) que  $\psi$  décroît (croît) vers des valeurs négatives (positives) plus importantes.

### 7.2.6 Régimes convectifs pour $Pr = 10$

Afin d'évaluer si (et dans quelle mesure) les résultats présentés ci-dessus sont altérés par des variations des propriétés des fluides considérés, des calculs ont été menés, pour  $Pr = 10$  ( $Le = 10^{-1}$  et  $\Psi = -0.2$ ).

Les divers états et valeurs seuils des transitions entre ceux-ci sont donnés dans les tableaux 3 (configuration “libre”) et 4 (configuration “rigide”), page 163. On observe ainsi pour les grandes valeurs de  $Ra$  (les particularités des écoulements des liquides binaires à faibles valeurs de  $Ra$  étant décrites dans le chapitre précédent) les spécificités suivantes :

- Dans la configuration “libre”, les écoulements stationnaires sont, comme ceux du cas  $Pr = 1$ , composés d'une seule cellule empêchant tout développement d'une éventuelle recirculation. Pour les deux types de fluides, ces écoulements sont les seuls états stables obtenus à haut  $Ra$  où ils tendent à devenir identiques.

---

<sup>2</sup>On s'intéresse, dans le système décrit ici, au cas où la recirculation est située en haut du cylindre. La situation équivalente dans laquelle le développement de la recirculation se déroule en bas du cylindre est donnée par l'application de la symétrie miroir  $\mathcal{M}$ .

- Aucun état  $sta_2$  n'est obtenu en configuration "rigide". Pour le fluide pur comme pour le liquide binaire, les branches  $osc_2$  se terminent (lorsqu'on les parcourt à  $Ra$  décroissant) par des bifurcations noeud-cols.
- les évolutions des écoulements  $sta_1$  en configuration "rigide" sont celles observées dans le cas  $Pr = 1$ . Un écoulement, obtenu pour  $Ra = 124000$  (soit légèrement en deçà de la valeur critique), est montré à titre d'exemple dans la figure 15, page 178. A nouveau, on observe la croissance d'une recirculation dans une région principalement verticalement stratifiée en densité, ainsi que l'illustrent les figures 16 et 17 (pages 179 et 180).

Tous les résultats au sujet de la recirculation, qu'il s'agisse de sa présence, de son développement et des conséquences de ce dernier observés dans le cas  $Pr = 1$  se retrouvent dans le cas  $Pr = 10$ .

On observe de plus que les rapports entre les valeurs seuils de fin de la branche  $sta_1$  des cas  $Pr = 1$  et  $Pr = 10$  est de 0.865 pour les liquides binaires et 0.863 pour les fluides purs. L'étude des rapports entre les autres valeurs seuils ne donne cependant pas d'autres cas où les deux soient aussi proches. Le fait d'obtenir des valeurs aussi proches est probablement fortuit ; seuls des calculs réalisés pour d'autres valeurs de  $Pr$  pourraient permettre d'élucider ce point.

# Axisymmetric convective states of pure and binary liquids enclosed in a vertical cylinder and boundary conditions' influence thereupon

E. Millour<sup>a</sup>, E. Tric<sup>b</sup> and G. Labrosse<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Université Paris-Sud,  
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique  
et les Sciences de l'Ingénieur LIMSI-CNRS,  
BP 133, 91403 ORSAY CEDEX, FRANCE

<sup>b</sup> Université Nice Sophia Antipolis,  
Laboratoire Géosciences AZUR,  
250 rue Albert Einstein, 06560 VALBONNE, FRANCE

## Abstract

Axisymmetric convection of a binary liquid enclosed in a vertical cylinder (of radius  $R$  and height  $h = 2R$ ) heated from below is numerically investigated, using a pseudo-spectral method. Both pure fluid and binary liquid convection are considered, as well as either no-slip or free-slip kinematic lateral boundary conditions. Branches of solutions and transitions between states that occur as the Rayleigh number  $Ra$  is varied are given, along with a description of the encountered bifurcations. When a free-slip condition is imposed along the circumference of the cell, pure fluid and binary liquid stationary flows are found to become identical at 'high' (i.e. greater than two or three times the threshold value of the quiescent state)  $Ra$  values. We thus find, in accordance with results given in many works dealing with this matter, that the convective behavior of a binary liquid at high  $Ra$  is that of a pure fluid.

When the lateral boundary condition is set to no-slip, significant differences with the previous case arise as multiple branches of solutions are found, in both pure fluid and binary liquid systems. This multiplicity of convective states is not only due to the occurrence of both steady and periodic motion but also to the existence of solutions based on a second kind of flow pattern that develops at high  $Ra$ . All these states display moreover both distinct and related behaviors according to the type of the fluid that is considered. The most striking discrepancy (to which most of this paper is devoted) between the two systems concerns the termination of the  $sta_1$  steady state branch. In the pure fluid system this transition leads to oscillatory convection via a global bifurcation, whereas neither this transition nor any equivalent oscillatory solution arise in the binary liquid system. In the later, we

find that the termination of the  $sta_1$  branch is due to a subcritical Hopf bifurcation. We then investigate the  $sta_1$  flows of both fluid systems and show that the observed discrepancies are due to the rise of a small roll in the ‘corner’ of the container. The growth of this roll, which eventually leads to the destabilization of the stationary convective state, is shown to be ruled by the properties of the considered fluid.

We then give results obtained for both boundary conditions and both fluids of different characteristics that those discussed above. Despite some differences in the overall behavior of the systems, comparatively to the previous ones, the essential features concerning both the influence of the boundary condition and the termination of the  $sta_1$  branches hold.

## 1 Introduction

Fluid motion driven by thermal gradients is a common feature of many natural and industrial systems. The traditional problem of a mono-component fluid layer heated from below is a paradigm of the rich spatiotemporal behaviors that can arise in non-linear systems driven away from equilibrium. Since the governing equations are well known and the experimental setup is sufficiently simple to allow controlled experiments, it has become the context of many studies (see for instance [4] for a review of recent developments) on pattern formation and related topics. The ‘simplicity’ of this system comes from the fact that only two parameters are needed to describe it: the Prandtl  $Pr$  and Rayleigh  $Ra$  numbers. The first solely depends on the characteristics of the fluid (and is thus thereafter fixed to a given value) whereas the second is proportional to the temperature difference applied to the layer, which makes it a perfect control parameter. The typical evolution of the system with increasing  $Ra$  is the following: The layer first remains motionless for too small an applied temperature difference. As the latter is increased, it eventually exceeds a critical value ( $Ra_c$ ) and steady convection sets in. More complicated dynamics, such as time-dependent convection arise as the system is taken further away from onset.

In two-component miscible liquid mixtures, mass fraction and temperature gradients are coupled by the Soret effect. According to the sign thereof (or equivalently of the non-dimensional parameter it enters in, the separation ratio  $\Psi$ ), the solute (which we take to be the heaviest of the two components) will migrate towards either the warmer ( $\Psi < 0$ ) or colder ( $\Psi > 0$ ) part of the container. The resulting Soret-driven mass fraction gradient will thus

induces a solutal buoyancy that will strengthen (when  $\Psi > 0$ ) or oppose ( $\Psi < 0$ ) the thermal one, consequently rushing or delaying the onset of convection, comparatively to the pure fluid problem. When thermal and solutal buoyancies compete, the interplay between the two moreover typically leads to the following dynamical behavior:

1. As in the pure fluid problem, the quiescent state is stable for  $Ra$  smaller than a threshold value  $Ra_H$ .
2. At  $Ra_H$ , a subcritical Hopf bifurcation of the quiescent state occurs and finite amplitude oscillatory convection sets in.
3. Once reached, the branch of oscillatory solutions can be followed towards higher or lower values of  $Ra$ . Most studies on binary liquid convection focus on these states and their spatiotemporal properties (see for instance [6] for a recent review).
4. For a high enough  $Ra$  value (typically less than twice  $Ra_H$ ) the oscillations cease as a transition to steady overturning convection (SOC) occurs.

Investigations of the stationary solutions of the system generally do not extend to  $Ra$  values much greater than those at which the transition to SOC occurs. It is indeed often noticed (e.g. [2, 3, 6]) that for increasing thermal stress (i.e. increasing  $Ra$ ), the steady convective flows of binary mixtures become similar to those of ‘equivalent’  $\psi = 0$  pure fluids. This behavior reflects the fact that strong convective motion efficiently mixes the mass fraction of solute in the bulk of the system, thus weakening any compositional effect on its solutions. This feature has been used to develop models, based on the assumption that a binary mixture problem can be seen as a perturbation of pure fluid one, to predict the transition to SOC [3]. There is nevertheless an experimental study [5] that unambiguously shows that the stationary convective patterns that develop in a binary liquid are unlike those obtained in a pure fluid subjected to identical constraints.

The aim of this paper is to tackle the topic as to whether pure liquid and binary fluid convection are indeed alike at high  $Ra$  values. The present work only deals with axisymmetric 2D solutions of the problem (most likely unstable with respect to azimuthal perturbations, as shown in [10], among others) in order to limit computational cost. Since previous 2D studies [8] have shown that in small aspect ratio cylinders lateral kinematic boundaries conditions exert a significant influence on convective flows, both cases of no-slip and free-slip kinematic conditions along the cylinder’s circumference will

be investigated.

The paper is organized as follows: The equations ruling binary liquid and pure fluid convection, along with the sets of modeled boundary conditions are given in section 2. Results obtained for  $Pr = 1$  and both types of fluids as well as both sets of boundary conditions are given and analyzed in section 3. Section 4 deals with a comparison between the previous results and those obtained when the characteristics of the fluids are changed ( $Pr$  is set to 10). Our conclusions are then summarized in section 5.

## 2 Geometrical configuration and system parameters

The equations ruling binary liquid convection, once rendered nondimensional and under the Oberbeck-Boussinesq hypotheses, are the following:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Ra Pr (\theta + \Psi \gamma) \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z + Le (\nabla^2 \gamma - \nabla^2 \theta), \quad (4)$$

where  $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z$  is the velocity,  $\mathbf{e}_r$  and  $\mathbf{e}_z$  respectively being the radial and upward unit vectors.  $p$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  denote departures from the static pressure, temperature and mass fraction profiles. This set of equations include four parameters, among which is the Rayleigh number:  $Ra = \frac{\alpha \Delta T g h^3}{\kappa \nu}$ , where  $h$  is the height of the cylinder,  $g$  the gravitational acceleration,  $\alpha$  the thermal expansion coefficient,  $\kappa$  and  $\nu$  the thermal and momentum diffusivities and  $\Delta T$  the imposed temperature difference between bottom and top plates. The other parameters solely depend on the nature of the considered liquid mixture and are: the Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$  and Lewis  $Le = \frac{\kappa_s}{\kappa}$  (where  $\kappa_s$  is the mass diffusivity) numbers, as well as the separation ratio  $\Psi = -\frac{\beta k_T}{\alpha T_0}$ , where  $T_0$ ,  $\beta$ , and  $k_T$  are the mean temperature, mass expansion and thermodiffusion coefficients. In the present work, the values of these last two numbers are set to  $Le = 0.1$  and  $\Psi = -0.2$ . The Prandtl number will first be set to 1 and then to 10.

The given set of equations also models pure fluid convection if equation (4) is discarded and  $\Psi$  set to zero.

The set of equations is solved by direct numerical integration: a Chebyshev pseudo-spectral method and a second order finite differences scheme are respectively used to solve the spatial and temporal evolutions of the fields. Computations were typically done using grids of  $(101 \times 51)$  nodes in the vertical and radial directions. Computations run with a finer  $(161 \times 81)$  grid were used to check the accuracy of the results given throughout this paper.

## 2.1 Boundary conditions

We consider a cylindrical enclosure of radius  $R$  and height  $h = 2R$  with the following boundary conditions:

- Imposed temperature on horizontal plates and thermally insulated side wall:

$$\theta = 0 \text{ for } z = \pm \frac{1}{2} \text{ and } \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ for } r = \frac{1}{2}.$$

- No mass flux through any boundary:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \text{ for } z = \pm \frac{1}{2} \text{ and } \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ for } r = \frac{1}{2}.$$

- No-slip kinematic condition on top and bottom boundaries.

$$u = w = 0 \text{ for } z = \pm \frac{1}{2}.$$

As for the kinematic condition along the cylinder's circumference, we shall investigate both cases of either no-slip or free-slip constraints:

$$\text{(NS)} \quad u = w = 0 \text{ for } r = \frac{1}{2},$$

or

$$\text{(FS)} \quad u = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ for } r = \frac{1}{2}.$$

the first (NS) refers to a liquid enclosed in a cylindrical box whereas the last (FS) is a crude approximation (capillary effects being here discarded) of a straight liquid bridge [10].

## 2.2 Symmetry property of the system

Because of the up-down symmetry of the system, if a state given by  $X_1 = (u_1, w_1, p_1, \theta_1, \gamma_1)$  satisfies equations (1-4), then so will its ‘mirror-image’  $X_2 = (u_2, w_2, p_2, \theta_2, \gamma_2)$ , given by:

$$\begin{aligned}u_2(r, z, t) &= u_1(r, -z, t) \\w_2(r, z, t) &= -w_1(r, -z, t) \\p_2(r, z, t) &= p_1(r, -z, t) \\\theta_2(r, z, t) &= -\theta_1(r, -z, t) \\\gamma_2(r, z, t) &= -\gamma_1(r, -z, t)\end{aligned}$$

Unless invariant under such a transformation, solutions therefore come in pairs.

## 3 $Pr = 1$ liquids

### 3.1 FS configuration

Computations were run for both pure fluid and binary mixture for  $Ra$  values up to  $3 \cdot 10^5$  (over thirty times the threshold values of the corresponding quiescent states). The convective states reached, along with the ranges in  $Ra$  over which they are stable, are given in Table 1.

The binary liquid is found to follow the usual sequence of transitions, from the subcritical Hopf bifurcation of the rest state to oscillatory convection, which eventually leads to steady convection at higher values of  $Ra$ . before that transition, These oscillatory regimes are found to undergo a complex sequence of bifurcations before giving way to stationary convection, which has been detailed elsewhere [8]. The steady convective state is found to be stable for  $Ra$  values at least up to  $3 \cdot 10^5$ .

The evolution with  $Ra$  of the pure fluid case is quite straightforward: once the supercritical pitchfork bifurcation of the quiescent state is reached, steady convection sets in and holds for all  $Ra$  (at least up to  $Ra = 3 \cdot 10^5$ ). Moreover, the convective pattern is found to barely evolve over the  $Ra$  interval investigated: flows always consist of a single roll that fills the whole of the enclosure, as illustrated in Figure 1. As for the binary liquid steady states, their structure is found to be strikingly similar to the pure fluid ones. This is shown in Figure 2, where the flow obtained at the same  $Ra (= 2 \cdot 10^5)$  value than the pure fluid one depicted in Figure 1 is given. Note that the depicted

mass fraction and temperature fields include conductive contributions, which will also be the case in all forthcoming illustrations.

The similarity between pure fluid and binary liquid convective states is observed for most  $Ra$  values, as shown in Figure 3, where the global kinetic energy  $E_k$  (i.e. the classical kinetic energy integrated over the total volume of the enclosure):

$$E_k = \int \int \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Sigma,$$

of both systems are plotted.

As expected, with increasing  $Ra$  the strong convective motion in the whole of the enclosure efficiently evens the mass fraction of solute (Figure 2) in the enclosure, and thus damps any Soret-induced gradient. Consequently, the binary liquid behaves like a pure fluid in the same conditions.

### 3.2 NS configuration

When the cylinder's circumference is taken to be a rigid wall, the system displays, for both pure and binary liquids, a wider range of dynamical behavior than in the FS configuration. Multiple branches of solutions are found, as not only do both steady and periodic motion occur, but also because two distinct flow patterns arise: In the first, flows mainly consist of a main roll while the second is based on a pair of stacked rolls. The branches of solutions will hence be hereafter labeled by a subscript referring to the pattern type (one roll or two) it belongs to. An example of a steady solution of the latter type ( $sta_2$ ) is given in Figure 4. Note that the flow is perfectly symmetric in  $z$  (and therefore invariant under  $\mathcal{M}$ ).

A bifurcation diagram depicting the domains over which the various convective states exist is given in Figure 5. Corresponding transitions between the branches and threshold values are given in Table 2.

Before giving a detailed description of all the transitions between the various convective regimes, we first comment the main differences between the pure fluid and binary liquid solutions:

- Each of the binary liquid convective states can be related to an equivalent one of the pure fluid system, except the  $osc_1$  flows which lie in very different  $Ra$  regions from one case to the other.
- Apart from the  $osc_1$  branches, all bifurcations occur at higher  $Ra$  values in the binary liquid system, which can be related to the fact that  $\Psi$

is negative and has therefore a stabilizing effect, comparatively to the pure fluid system.

- Moreover, for a pure fluid transitions from one state (of a given pattern) to its periodic counterpart are forward, whereas there is hysteresis in all the transitions in the binary liquid system.

### 3.2.1 States and transitions for a pure fluid

As depicted by the bifurcation diagram of Figure 5, the  $sta_1$  flow that stems from the supercritical pitchfork bifurcation of the quiescent state eventually gives way (in an global bifurcation that occurs at  $Ra_h = 84903$  and will be further detailed in section 3.2.2) to an oscillatory one. Beginning at that bifurcation, the  $osc_1$  branch extends up to  $Ra = 91350$  where it ends in a saddle-node bifurcation. Beyond this threshold, the system is sent to the oscillatory  $osc_2$  branch. These states are oscillatory versions of the  $sta_2$  one displayed in Figure 4: during the first half of the period one of the rolls expands until it occupies a large part of the enclosure and then shrinks back to its original position. These oscillations possess a temporal symmetry such that a shift of half a period is equivalent to applying  $\mathcal{M}$ . The  $osc_2$  state exists at least up to  $Ra = 2 \cdot 10^5$  and down to  $Ra = 7.65 \cdot 10^4$ . The amplitude (and frequency) of the oscillations decrease with decreasing  $Ra$ , until it cancels as the transition (a supercritical Hopf bifurcation) to the steady  $sta_2$  state is reached. The  $sta_2$  branch can be followed down to  $Ra = 4.85 \cdot 10^4$ , where it ends in a saddle-node bifurcation.

### 3.2.2 End of the $sta_1$ pure fluid branch

Flows of the  $sta_1$  branch that stems from the quiescent state consist of a single roll. In contrast to the SF configuration, there are however also smaller rolls located in the ‘corners’ of the enclosure, where horizontal and side walls meet. At low  $Ra$ , these rolls (which will from now on be referred to as corner rolls) are extremely small. Their size however increases with increasing  $Ra$  as depicted in Figures 6 and 7.

As the critical value  $Ra_h = 84903$  is reached, the  $sta_1$  state gives way to the oscillatory  $osc_1$  one. The typical evolution of the periodic  $osc_1$  flows above this threshold is illustrated in Figure 8; these low frequency oscillations mainly consist of alternate sequences of slow and rapid evolutions, the former occurring when the system is in the vicinity of ‘ghosts’ of the pair of  $sta_1$  states and the latter as it is cast from one to the other. The evolution of the system during such switches is given in Figures 9 and 10. These oscillations

possess a temporal symmetry such that a shift of half a period is equivalent to applying the  $\mathcal{M}$  symmetry.

The scenario that leads to the birth of the  $\text{osc}_1$  state from the  $\text{sta}_1$  ones via a global bifurcation is sketched in Figure 11. For values of  $Ra$  lower than  $Ra_h$ , two pairs of stable (solid dots) and unstable (hollow dots) steady states coexist in phase space. As  $Ra$  increases towards  $Ra_h$ , stable and unstable states approach one another (pairwise) and merge in a saddle-node bifurcation at  $Ra = Ra_h$ . The connections between the steady states form the heteroclinic orbit that becomes the  $\text{osc}_1$  limit cycle when  $Ra > Ra_h$ . Although unstable states are unreachable (by our time-marching numerical tool), their presence and the scenario mentioned above are supported by the following observations:

1. There is no hysteresis in this transition.
2. The period  $\tau$  of the oscillations diverges as  $Ra$  is decreased towards  $Ra_h$  (a  $\tau \propto (Ra - Ra_h)^{-1/2}$  trend is found, although only over a rather narrow range:  $[Ra - Ra_h] \sim 100$ ).
3. The (asymptotic) transient behavior of any monitored variable of the  $\text{sta}_1$  flows, as they evolve toward their final values, clearly display a non-oscillatory exponential relaxation  $e^{\lambda t}$ . Evaluating the decay rates  $\lambda$  as  $Ra_h$  is approached yields the  $\lambda(Ra) \propto (Ra_h - Ra)^{1/2}$  scaling expected in the vicinity of saddle-node bifurcations.

This global bifurcation has been reported before [1, 9], in the context of axisymmetric thermal convection in a cylinder of larger ( $\Gamma = 5$ ) aspect ratio. These studies moreover include an investigation of the consequences of the sidewall's thermal conductivity on the states and transitions of the system. They show that, in contrast to our results, this bifurcation to oscillatory convection requires a lateral wall that must be a good thermal conductor.

### 3.2.3 States and transitions for a binary liquid

As in the FS configuration, the subcritical Hopf bifurcation of the quiescent state leads the system to oscillatory convection which, at greater values of  $Ra$ , eventually leads to SOC. The rather specific bifurcations that lead to steady convection as well as a full description of the oscillatory states is given in [8].

The steady  $\text{sta}_1$  binary liquid convective states are similar to those of the pure fluid case as they also consist of a single roll which, corner regions

excluded, fills the whole of the enclosure. There even is a common range ( $Ra \in [3 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4]$ , as shown by the collapse of the curves in Figure 5) where both pure fluid and binary liquid systems display very similar velocity and temperature distributions. Beyond this range, a discrepancy (which will be thoroughly discussed in following subsections) between the two arises. The  $sta_1$  branch extends up to  $Ra_c = 1.077 \cdot 10^5$ .

Beyond that last critical value, the flow is cast to the  $osc_2$  branch. These last states are similar like those encountered in the pure fluid case and are likewise found to be stable at least up to  $Ra = 2 \cdot 10^5$  as well. The  $osc_2$  branch can be followed down to  $Ra = 9.275 \cdot 10^4$  where it ends in a saddle-node bifurcation which leads the system to settle on the  $sta_2$  branch. If  $Ra$  is then increased, the flow remains steady up to  $Ra = 7.65 \cdot 10^4$  where a subcritical Hopf bifurcation (recall that in the pure fluid system that bifurcation is supercritical) leads the system back to the  $osc_2$  branch. The  $sta_2$  branch can be followed down to  $Ra = 5.075 \cdot 10^4$ , where it ends at a saddle-node bifurcation.

### 3.2.4 End of the $sta_1$ binary liquid branch

As mentioned in section 3.2.3, pure and binary liquid  $sta_1$  convective regimes are similar over  $Ra \in [3 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4]$  and then differ. This discrepancy is due to distinct growth rates of the corner rolls which is reduced in the binary liquid case, comparatively to the pure fluid one. This is exemplified in Figure 12, where the binary liquid flow obtained at  $Ra = 1.075 \cdot 10^5$  (a value slightly below  $Ra_c$ , for which the  $sta_1$  branch ends) is given. The fields are similar to those of the pure fluid (displayed in Figure 7) obtained at  $Ra = 8.49 \cdot 10^4$ , close to the termination of the  $sta_1$  branch.

Despite this similarity between pure and binary liquid  $sta_1$  solutions, the latter do not however lead an oscillatory  $osc_1$ -like state that the results from the study of the pure fluid system would make one expect. The essential difference between the two systems' steady states is unraveled by an investigation of the respective (asymptotic) dynamical behaviors displayed by transient evolution toward these solutions:

- As stated in section 3.2.2, in the pure fluid system transient evolutions display an  $e^{\lambda t}$  behavior and the  $sta_1$  fixed points are nodes and vanish in saddle-node bifurcations at criticality.
- In the binary liquid system (and in the vicinity of  $Ra_c$ ), the relaxation to steadiness consists of exponentially decaying oscillations that can be

fitted by  $e^{\lambda t} \cos \omega t$  which implies that these  $sta_1$  fixed points are spiral nodes. The decay rates  $\lambda$  are moreover found to follow a  $\lambda(Ra) \propto (Ra_c - Ra)$  scaling. The  $sta_1$  branch thus ends as the spiral nodes turn unstable in a subcritical Hopf bifurcation.

Although this difference in fixed point types yields an explanation for the non-occurrence of an  $osc_1$ -like state in the binary liquid case, it does not provide much insight on the physical mechanism responsible for the steady state's loss of stability. A more quantitative analysis of these flows was therefore undertaken and is given in the next section.

### 3.2.5 Destabilization of the pure and binary liquid $sta_1$ flows

In the  $\Gamma = 5$  axisymmetric configuration investigated in [9], the initial (five-roll) steady states' evolution with increasing  $Ra$  was noticed to consist of the expansion of the four outermost rolls at the expense of the central one. Moreover, investigating the termination of the five-roll branch (as a function of  $Pr$ ), the authors found that this transition occurs as the central roll reaches a given size. This led to the hypothesis of a minimum central roll size below which that structure cannot exist. Combining this constraint with analytical results from a theory of axisymmetric wavelength selection [7] (which predicts the size of rolls as a function of  $Ra$  and  $Pr$ ) yielded an analytic expression of  $Ra_c(Pr)$ , the value at which the five-roll branch should terminate. Although the expression of  $Ra_c(Pr)$  stemmed from an equation derived from an asymptotic expansion in  $Ra$  and in  $1/r$ , it nevertheless produced results in qualitative agreement with those obtained by numerical simulations.

Although this model does not apply to the present case, an analogous analysis of the convective flows was undertaken. The first step of the analysis is to assume that the features of the various physical fields on the cylinder's circumference include and display the physics of the whole system. This assumption is supported by the following observations:

1. The loss of both pure and binary liquid  $sta_1$  branches are heralded by the growth of the corner roll.
2. In this corner region, both temperature and mass fraction variations are much smaller in the radial direction than in the vertical one (a feature that the contour plots of Figures 7 and 12 clearly display)

The temperature distributions along the sidewall of the enclosure of pure fluid  $sta_1$  states are shown in the upper graph of Figure 13. Surprisingly, these

do not evolve much in the range in  $Ra$  over which a significant growth of the corner roll is observed. Moreover, the equivalent ‘buoyancy’ profiles  $T + \Psi C$  of the binary liquid  $sta_1$  states (lower graph of Figure 13) also display little evolution with  $Ra$ . These results imply that in both cases local ‘buoyancy’ gradients are approximately constant for  $z \in [0.2, 0.5]$ . The next step of the analysis comes from the following observations:

1. Velocities in the corner roll are small compared to those of the main roll (typically by a factor of twenty or more), which leads to the assumption that they can be neglected.
2. The evolution of the height  $h$  of the corner roll with  $Ra$  is displayed in Figure 14. To be more specific,  $h$  was computed as being the distance between the upper corner of the enclosure ( $r = 0.5, z = 0.5$ ) and the altitude at which the null streamfunction contour (that marks the separation between main and corner rolls) reaches the sidewall. The crucial result depicted by the graph of Figure 14 is that for both pure and binary liquid systems,  $h$  is less than 0.3, which implies that the corner rolls dwell in regions in which ‘buoyancy’ gradients are essentially constant.

Since the corner roll is an approximately motionless region that develops in an area of mainly vertical and nearly constant buoyancy gradient, it can be seen as a locally quasi-quiet region. A local Rayleigh number  $Ra_*$ , based on both  $h$  and local buoyancy gradient, could be assigned to it. As  $Ra$  increases, so does  $h$  and consequently  $Ra_*$ , which implies that the greater the extension of the quasi-quiet region is, the less stable it will be. Eventually  $h$  becomes such that the quasi-quiet region turns unstable (in other words,  $Ra_*$  reaches a critical value), leading to the growth of the corner cell that destabilizes the  $sta_1$  state.

The physical mechanism responsible for the termination of the  $sta_1$  branch is thus the same than the one leading to the destabilization of the quiet state. The well known consequences induced by the presence of the Soret effect on the latter hence also apply to the former. This leads to a further understanding of the following aforementioned observations:

1. The  $sta_1$  branch extends to greater  $Ra$  values in the binary liquid case than in the pure fluid one. This is clearly due to the stabilizing Soret effect (the negative value of  $\Psi$ ) that, in the same way that it delays the onset of convection of the quiet state, delays the growth of the corner roll. It can moreover be inferred that this feature will hold for other values of  $\Psi$  (both negative and positive).

2. In the FS configuration, pure and binary liquid steady states are found to be stable over the investigated range in  $Ra$ . Due to the free-slip boundary condition on the cylinder's circumference, the main roll spans the whole enclosure, leaving no room for any corner roll to grow. For these flows, the destabilizing mechanism obviously cannot arise.

It might be worth mentioning that the figures in [9] that illustrate the shrinking of the center roll also display the presence of a corner roll and its growth with increasing  $Ra$ .

## 4 $Pr = 10$ liquids

To check whether the foregoing observations and related inferred mechanism were not specific to the  $Pr$  value investigated (when  $Pr = 1$  both momentum and heat diffuse over the same time scales), computations were run for the same configurations, but with  $Pr = 10$ . The obtained states and thresholds thereof are summarized in Table 3 (for the FS configuration) and Table 4 (for the NS one). These results yield the following features:

- At low  $Ra$ , the  $osc_1$  branches are smaller than the corresponding  $Pr = 1$  ones. In fact, they lie in  $Ra$  ranges below the subcritical Hopf bifurcation of the quiescent state and above the lowest value for which the  $sta_1$  SOC flows exist. In these cases, the oscillatory  $osc_1$  can only be reached by finite amplitude perturbations of the quiescent or stationary states. Hence, as the quiescent state becomes unstable, the system directly evolves to SOC (such behavior has also been witnessed by [2])
- the  $sta_1$  flows in the FS configuration, like those in the  $Pr = 1$  case, consist of a single main roll with no corner one and also become identical with increasing  $Ra$ .
- No  $sta_2$  flows are found (both  $osc_2$  branches end in saddle-node bifurcations).
- As for the  $sta_1$  flows in the NS configuration, they also behave in the same way than those of the  $Pr = 1$  case. An illustration of such flows is given in Figure 15, for  $Ra = 124000$  (slightly below the threshold of the  $sta_1$  branch). Again, a corner roll is found to grow in a region where buoyancy gradients are roughly constant, as shown in Figures 16 and 17. The results concerning both the influence of the boundary condition and the termination of the  $sta_1$  branches obtained for  $Pr = 1$  thus also hold when  $Pr = 10$ .

The ratio of the  $Pr = 1$  and  $Pr = 10$  threshold values of the  $sta_1$  binary liquid states is found to be of 0.865 which is almost that of the same ratio for pure liquids (0.863). Ratios of the other thresholds do not compare with these values and the fact that the former two are alike could be fortuitous; computations with other  $Pr$  values should allow to find out if such is the case.

## 5 Conclusions

The axisymmetric convective states of both pure and binary liquids (of negative separation ratio  $\psi = -0.2$ ) enclosed in a small aspect ratio cylinder have been computed for two types of kinematic boundary conditions on the cylinder's circumference, free-slip or no-slip. Both cases of  $Pr = 1$  and  $Pr = 10$  fluids were investigated.

For free-slip conditions and  $Pr$  values of 1 and 10, the steady flows obtained at high  $Ra$  values for either pure or binary liquids are found to be identical, as pointed out by many other studies (such as [3, 6]).

When the lateral boundary condition is set to no-slip, multiple branches of solutions arise, in both kinds of fluid systems. Most of these convective solutions, which can be steady or periodic, are moreover common to both pure fluid and binary liquid systems. An interesting exception (observed for  $Pr = 1$  and  $Pr = 10$ ) is given by the branches of steady  $sta_1$  solutions of both systems. For the pure fluid system, the  $sta_1$  branch ends in a global bifurcation (encountered and identified by [1, 9], in the context of axisymmetric thermal convection in a cylinder of larger aspect ratio) in which the pair of symmetry-related  $sta_1$  solutions vanish in saddle-node bifurcations with another pair of unstable steady solutions. These four states being connected in a heteroclinic orbit prior to the bifurcation, a stable limit cycle of  $osc_1$  solutions is consequently born at the bifurcation. For the binary liquid system, this global bifurcation does not occur (and consequently neither does any  $osc_1$ -like solution) as the branch of  $sta_1$  solutions ends in a subcritical Hopf bifurcation.

Despite this significant difference in bifurcation behavior and the fact that the  $sta_1$  branch extends to higher  $Ra$  values for the binary liquid system than for the pure fluid system, the steady flows of both types of fluids are nevertheless similar: in both cases, the  $sta_1$  solution is destabilized by the rise and growth of a small roll located in the 'corner' of the enclosure. The growth of

this corner roll is moreover clearly ruled by the Soret effect in the same way than the quiescent state is. Thus, the stabilizing Soret effect that depresses the onset of convection in the latter similarly depresses the growth of the corner roll and hence stabilizes the  $sta_1$  flow.

From these results, we conjecture that the steady convective states of pure and binary liquids will indeed become identical at high  $Ra$  values if the investigated system is such that it forbids (because of imposed lateral periodicity, infinite layers are of that kind) the rise of small roll structures.

## Acknowledgments

We gratefully acknowledge the Centre de Ressources Informatiques de l'Université Paris-Sud for granting us unbounded use of their computer facilities.

## References

- [1] D. Barkley and L. Tuckerman, "Traveling waves in axisymmetric convection: the role of sidewall conductivity", *Physica D* (1989) 37, pp. 288-294
- [2] W. Barten, M. Lücke, W. Hort and M. Kamps, "Convection in binary fluid mixture. I. Extended traveling-wave and stationary states", *Phys. Rev. E* (1995), vol 51, pp. 5636-5661
- [3] D. Bensimon, A. Pumir and B.I. Shraiman, "Nonlinear Theory of Traveling Wave Convection in Binary Mixtures", *J. Phys. France* (1989) 50, pp. 3089-3108
- [4] E. Bodenschatz, W. Pesch and G. Ahlers, "Recent developments in Rayleigh-Bénard convection", *Annu. Rev. Fluid Mech.* (2000) 32, pp. 709-778
- [5] A. La Porta, K.D. Eaton and C.M. Surko, "Transition between curved and angular textures in binary fluid convection", *Phys. Rev. E* (1996), vol. 53(1), pp. 570-576
- [6] M. Lücke, W. Barten, P. Büchel, C. Fütterer, St. Hollinger and Ch. Jung, "Pattern Formation in Binary Fluid Convection and in Systems with Throughflow", in *Evolution of structures in dissipative continuous systems, Lecture Notes in Physics (Springer 1998)*, ed. by F.H. Busse and S.C. Müller, pp. 127-197

- [7] P. Manneville and J. M. Piquemal, "*Zigzag instability and axisymmetric rolls in Rayleigh-Bénard convection: The effects of curvature*", *Phys. Rev. A* (1983), vol. 28(3), pp. 1774-1790
- [8] E. Millour, E. Tric and G. Labrosse, "*Bifurcation multiplicity of the oscillatory convective states of an enclosed binary liquid*", unpublished
- [9] L.S. Tuckerman and D. Barkley, "*Global bifurcation to traveling waves in axisymmetric convection*", *Phys. Rev. Lett.* (1988), vol. 61(4), pp. 408-411
- [10] M. Wanshura, H.C. Kuhlmann and H.J. Rath, "*Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below*", *J. Fluid Mech.* (1996), vol. 326, pp. 399-415

<i>Pr</i> = 1 Binary liquid				
State	Range in <i>Ra</i>		Bifurcates towards	
	begins	ends	for <i>Ra</i> ↘	for <i>Ra</i> ↗
Conductive (cond)		8413		osc
Oscillatory (osc)	8349	8948	cond	sta
Stationary (sta)	8117	? > 3.10 <sup>5</sup>	cond	
<i>Pr</i> = 1 Pure fluid				
Conductive (cond)		6250		sta
Stationary (sta)	6250	? > 3.10 <sup>5</sup>	cond	

Table 1: States and threshold values thereof. *Pr* = 1, FS configuration.

<i>Pr</i> = 1 Binary liquid				
State	Range in <i>Ra</i>		Bifurcates towards	
	begins	ends	for <i>Ra</i> ↘	for <i>Ra</i> ↗
Conductive (cond)		15168		osc <sub>1</sub>
Oscillatory (osc <sub>1</sub> )	14717	15797	cond	sta <sub>1</sub>
Stationary (sta <sub>1</sub> )	14938	107700	osc <sub>1</sub>	osc <sub>2</sub>
Stationary (sta <sub>2</sub> )	50750	98000	sta <sub>1</sub>	osc <sub>2</sub>
Oscillatory (osc <sub>2</sub> )	92750	? > 2.10 <sup>5</sup>	sta <sub>2</sub>	
<i>Pr</i> = 1 Pure fluid				
Conductive (cond)		10850		sta <sub>1</sub>
Stationary (sta <sub>1</sub> )	10870	84903	cond	osc <sub>1</sub>
Oscillatory (osc <sub>1</sub> )	84903	91350	sta <sub>1</sub>	osc <sub>2</sub>
Stationary (sta <sub>2</sub> )	48500	76500	sta <sub>1</sub>	osc <sub>2</sub>
Oscillatory (osc <sub>2</sub> )	76500	? > 2.10 <sup>5</sup>	sta <sub>2</sub>	

Table 2: States and threshold values thereof. *Pr* = 1, NS configuration.

<i>Pr</i> = 10 Binary liquid				
State	Range in <i>Ra</i>		Bifurcates towards	
	begins	ends	for <i>Ra</i> ↘	for <i>Ra</i> ↗
Conductive (cond)		8542		sta
Oscillatory (osc)	8168	8403	cond	sta
Stationary (sta)	7857	? > 2.10 <sup>5</sup>	cond	
<i>Pr</i> = 10 Pure fluid				
Conductive (cond)		6250		sta
Stationary (sta)	6250	? > 2.10 <sup>5</sup>	cond	

Table 3: States and threshold values thereof. *Pr* = 10, FS configuration.

<i>Pr</i> = 10 Binary liquid				
State	Range in <i>Ra</i>		Bifurcates towards	
	begins	ends	for <i>Ra</i> ↘	for <i>Ra</i> ↗
Conductive (cond)		15601		sta <sub>1</sub>
Oscillatory (osc <sub>1</sub> )	14413	14870	cond	sta <sub>1</sub>
Stationary (sta <sub>1</sub> )	14090	124500	cond	osc <sub>2</sub>
Oscillatory (osc <sub>2</sub> )	109565	? > 2.10 <sup>5</sup>	sta <sub>1</sub>	
<i>Pr</i> = 10 Pure fluid				
Conductive (cond)		10870		sta <sub>1</sub>
Stationary (sta <sub>1</sub> )	10870	98360	cond	osc <sub>1</sub>
Oscillatory (osc <sub>1</sub> )	98360	107820	sta <sub>1</sub>	osc <sub>2</sub>
Oscillatory (osc <sub>2</sub> )	101763	? > 2.10 <sup>5</sup>	osc <sub>1</sub>	

Table 4: States and threshold values thereof. *Pr* = 10, NS configuration.

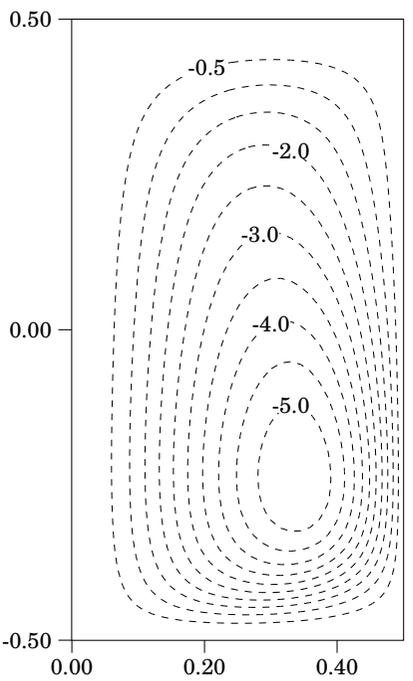
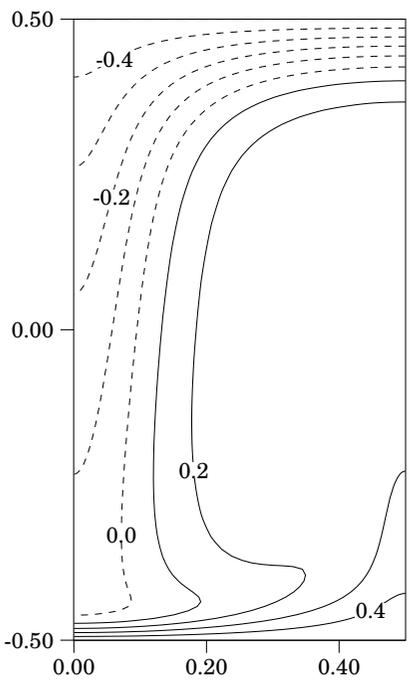


Figure 1: Streamfunction and temperature contours of the  $Ra = 2.10^5$ ,  $Pr = 1$ , pure fluid steady flow (FS configuration).

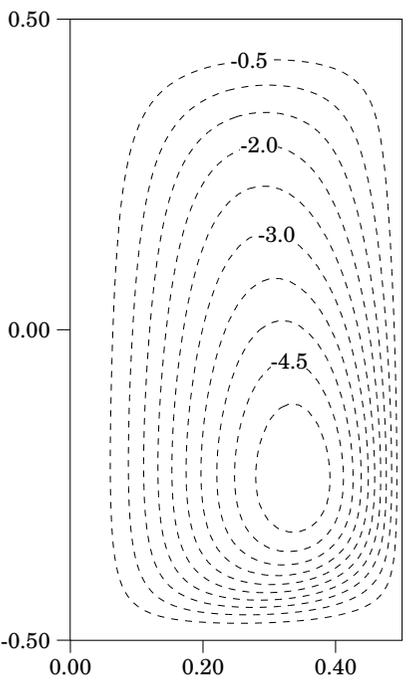
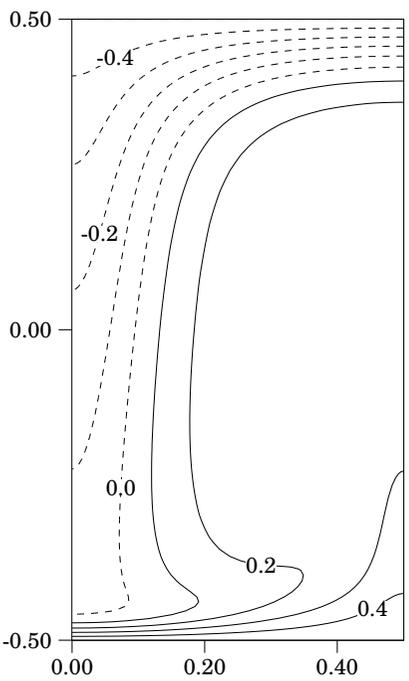
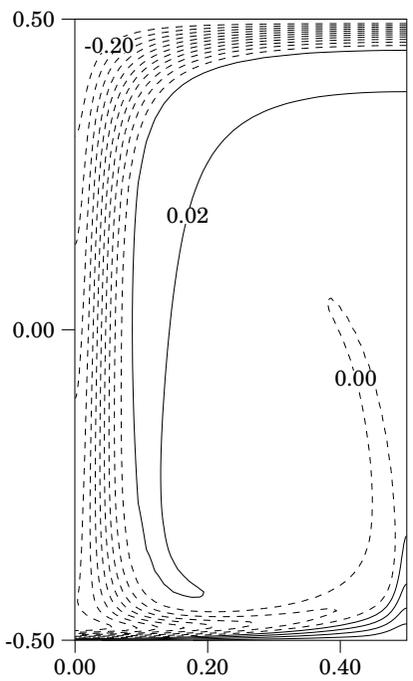


Figure 2: Streamfunction, temperature and mass fraction contours of the  $Ra = 2.10^5$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{-1}$  and  $\Psi = -0.2$  binary liquid steady flow (FS configuration).

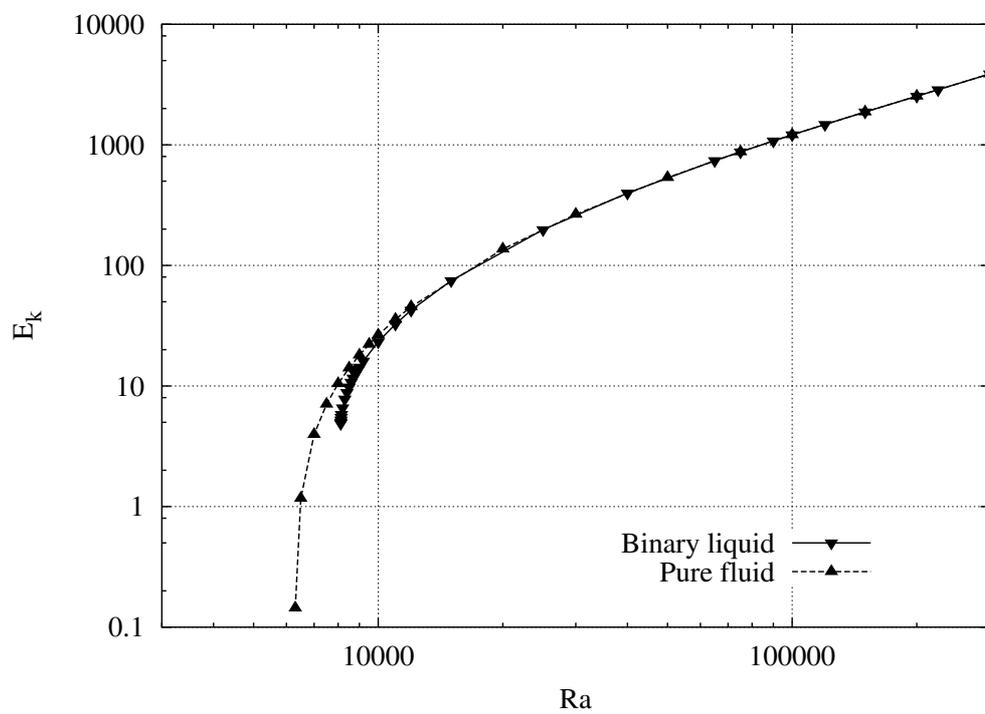


Figure 3: Global kinetic energy of  $Pr = 1$  pure fluid and binary liquid steady convective states in the FS configuration.

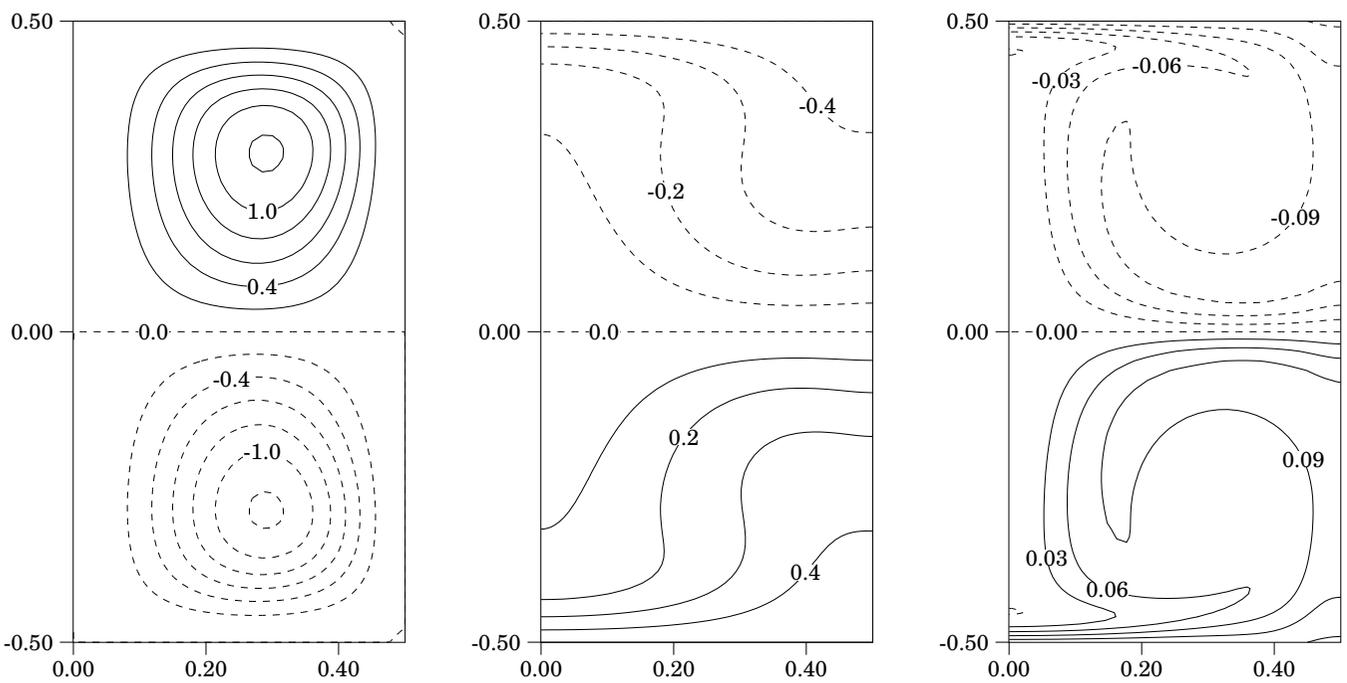


Figure 4: Streamfunction, temperature and mass fraction contours of the  $Ra = 9 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{-1}$  and  $\Psi = -0.2$  binary liquid state (NS configuration).

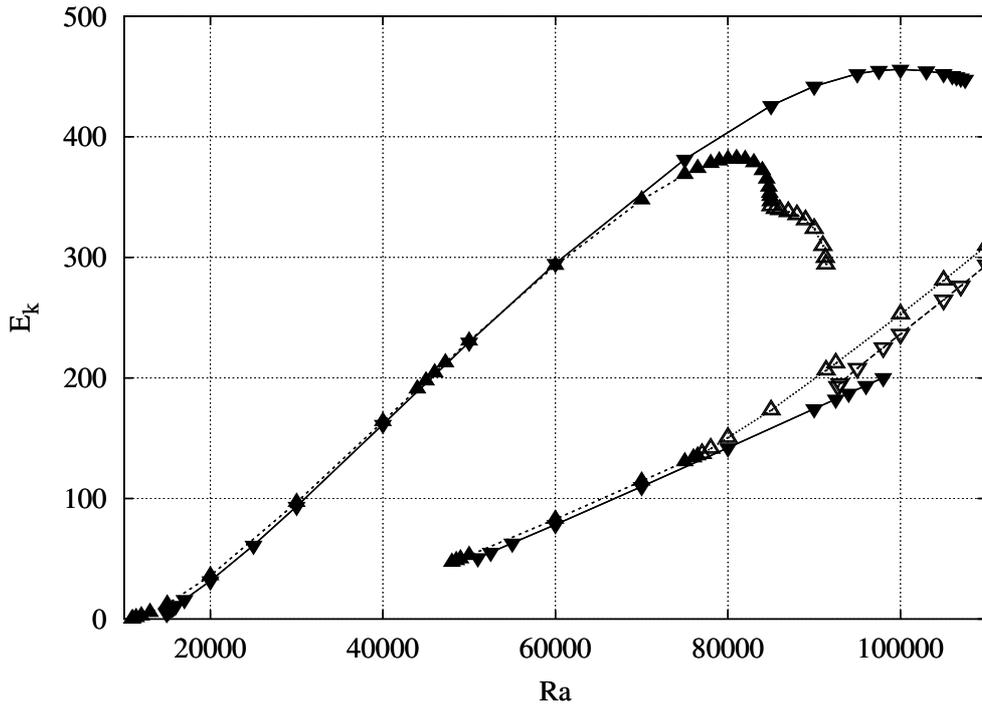


Figure 5: Global kinetic energy of the  $Pr = 1$  pure fluid (upward triangles) and binary liquid (downward triangles) convective states in the NS configuration. Filled (empty) symbols denote steady (oscillatory) states. The upper curves correspond to single roll ( $sta_1$  and  $osc_1$ ) flows and the lower ones to stacked rolls ( $sta_2$  and  $osc_2$ ) states. For oscillatory solutions, the mean value of the oscillation  $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau E_k dt$  is given. Transitions from and to the various branches of solutions are given in Table 2.

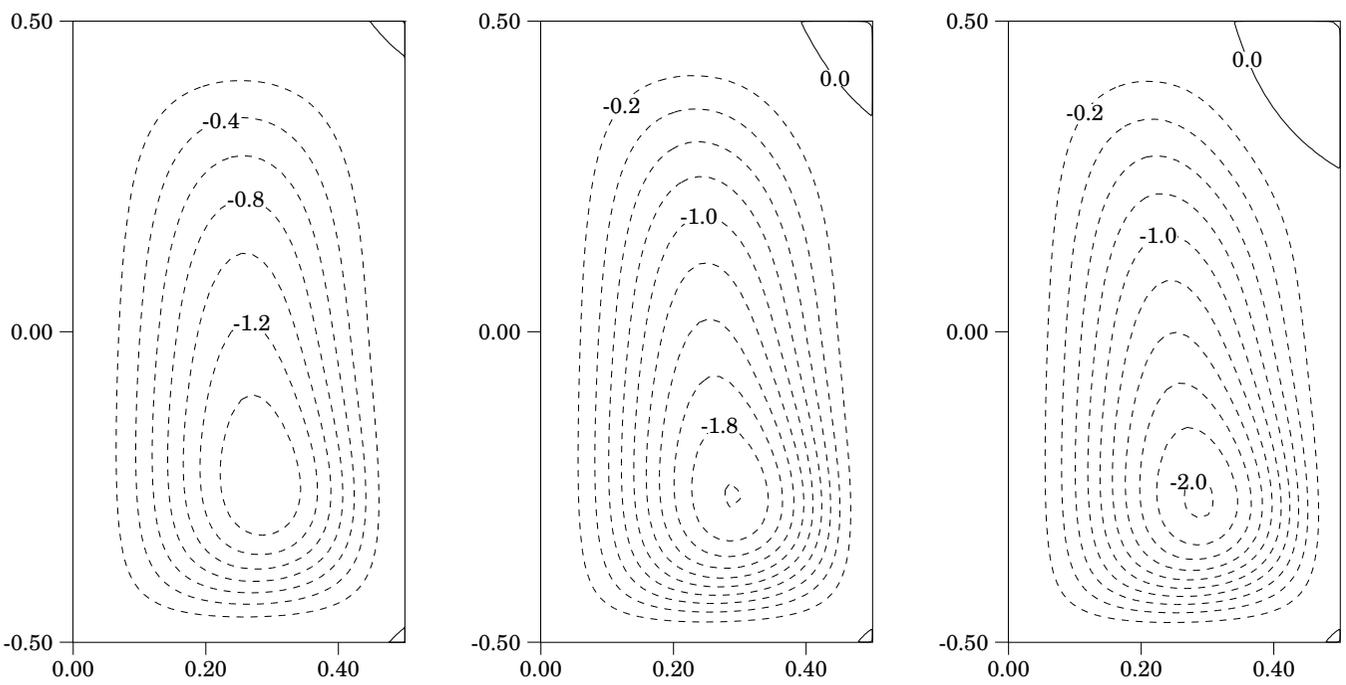


Figure 6: Streamfunction contours of the  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ,  $Ra = 7.5 \cdot 10^4$  and  $Ra = 8.4 \cdot 10^4$  pure fluid steady states (NS configuration).

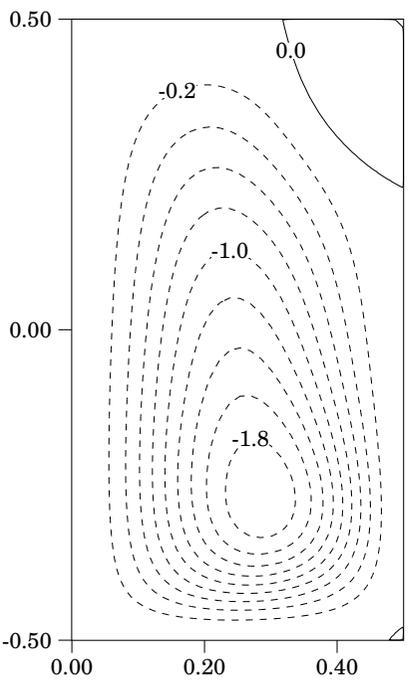
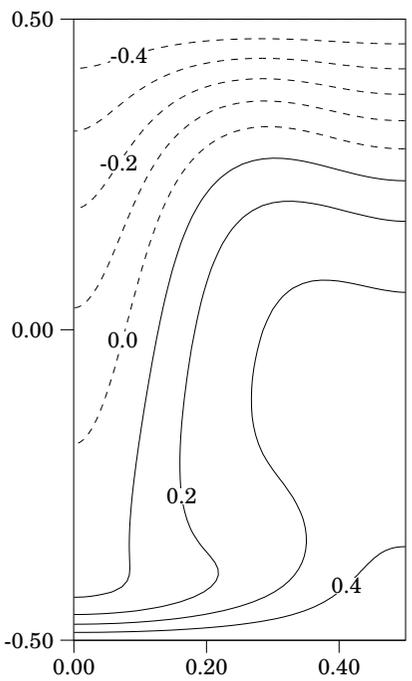


Figure 7: Streamfunction and temperature contours of the  $Ra = 8.49 \times 10^4$  pure fluid steady state (NS configuration).

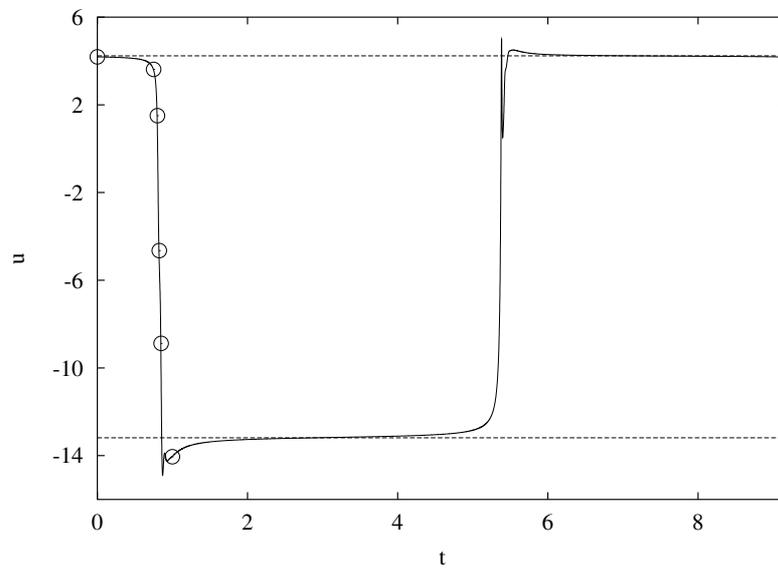


Figure 8: Pure  $Pr = 1$  fluid, NS configuration. Values of the horizontal velocity  $u$  at the  $(r = \frac{1}{8}, z = -\frac{1}{4})$  node. Dashed lines:  $Ra = 8.490 \cdot 10^4$   $sta_1$  steady states values. Solid line: time series over a period ( $\tau = 9.1910392444$ ) of the  $Ra = 8.491 \cdot 10^4$   $osc_1$  flow. The hollow dots indicate the instants at which the snapshots displayed in Figures 9 and 10 were taken.

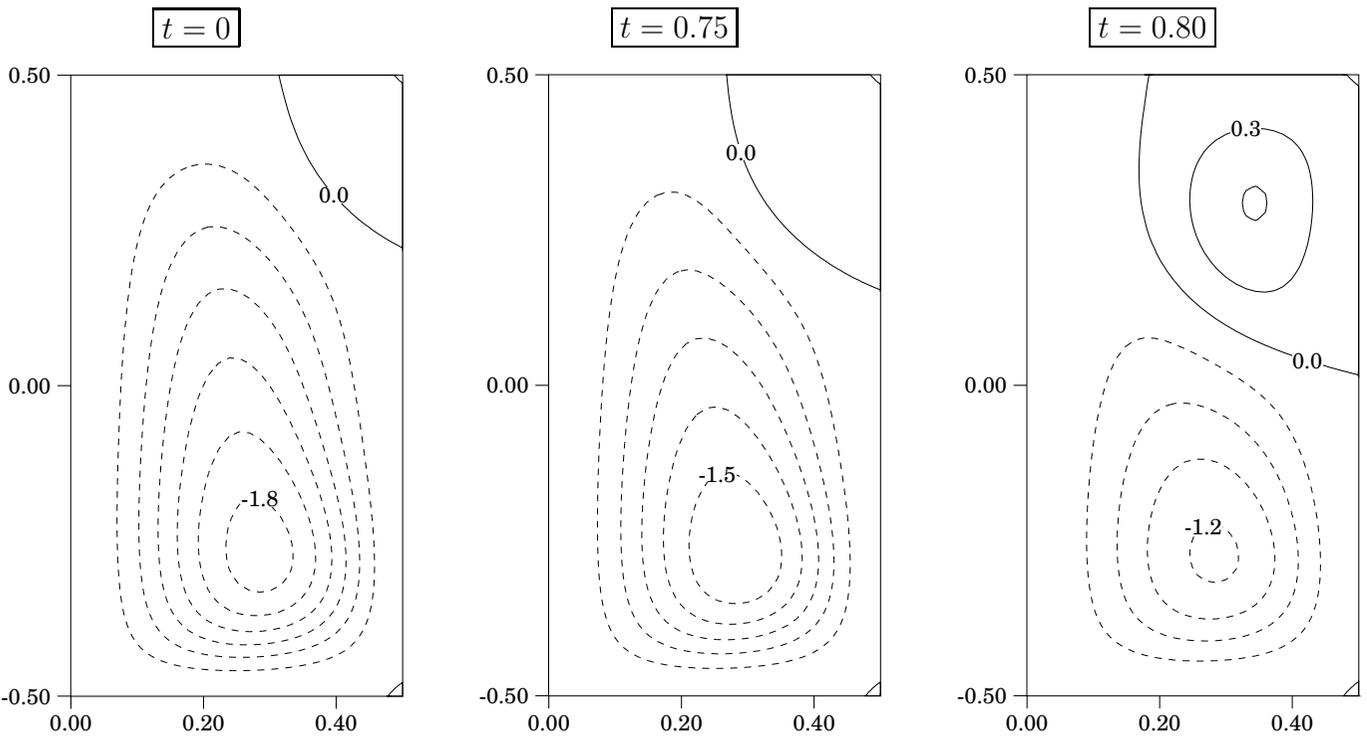


Figure 9: Pure  $Pr = 1$  fluid, NS configuration. Streamfunction contours of the  $Ra = 8.491 10^4$  osc<sub>1</sub> oscillatory state at given instants (continued in Figure 10).

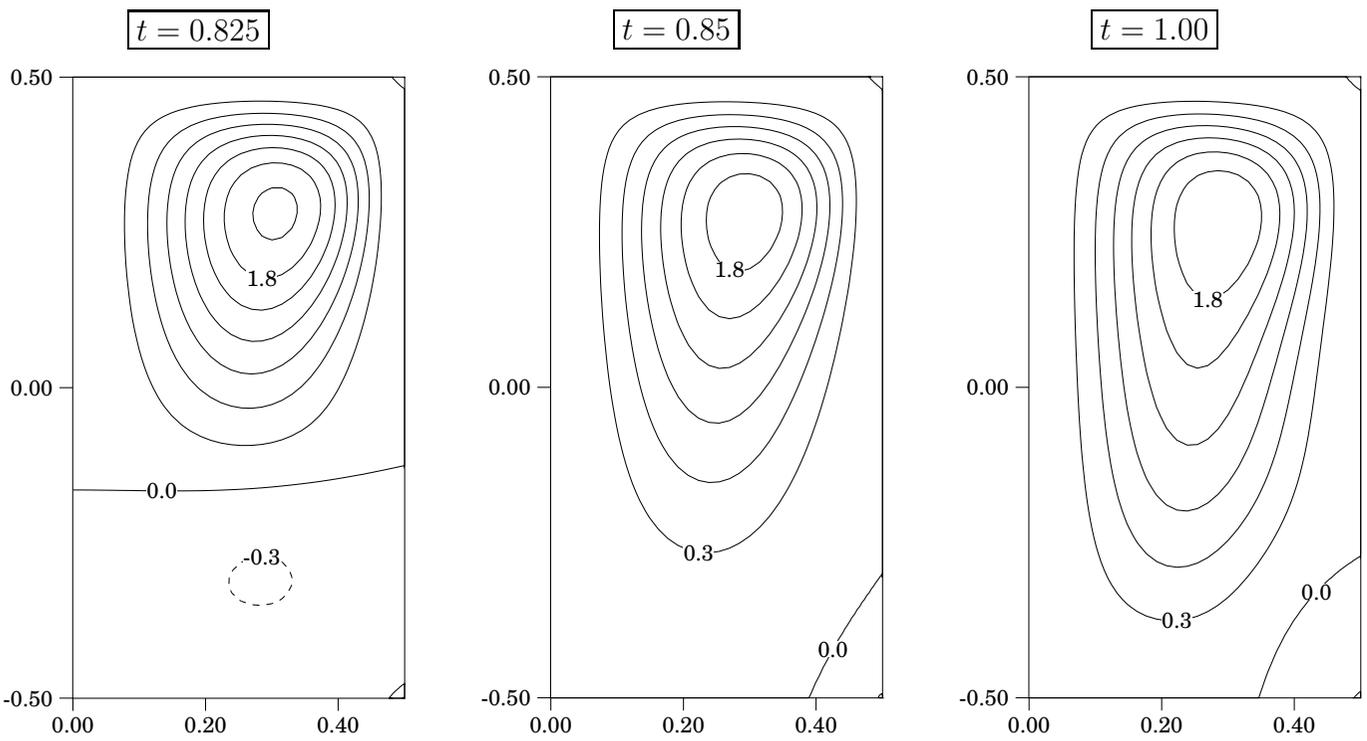
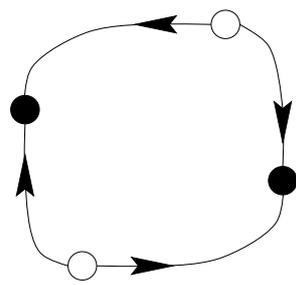
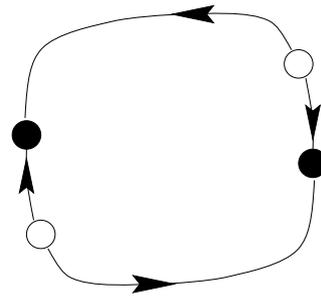


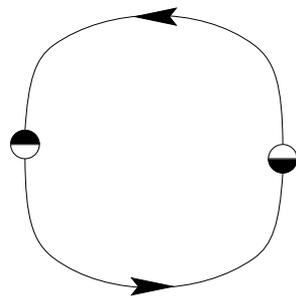
Figure 10: Pure  $Pr = 1$  fluid NS configuration. Streamfunction contours of the  $Ra = 8.491 \cdot 10^4$  oscillatory state at given instants.



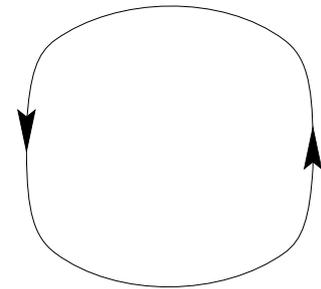
$$Ra = Ra_0$$



$$Ra_0 < Ra < Ra_h$$



$$Ra = Ra_h$$



$$Ra > Ra_h$$

Figure 11: Schematic representation of the global bifurcation involving pairs of steady stable (solid dots) and unstable (hollow dots) states and leading to the generation of a limit cycle.

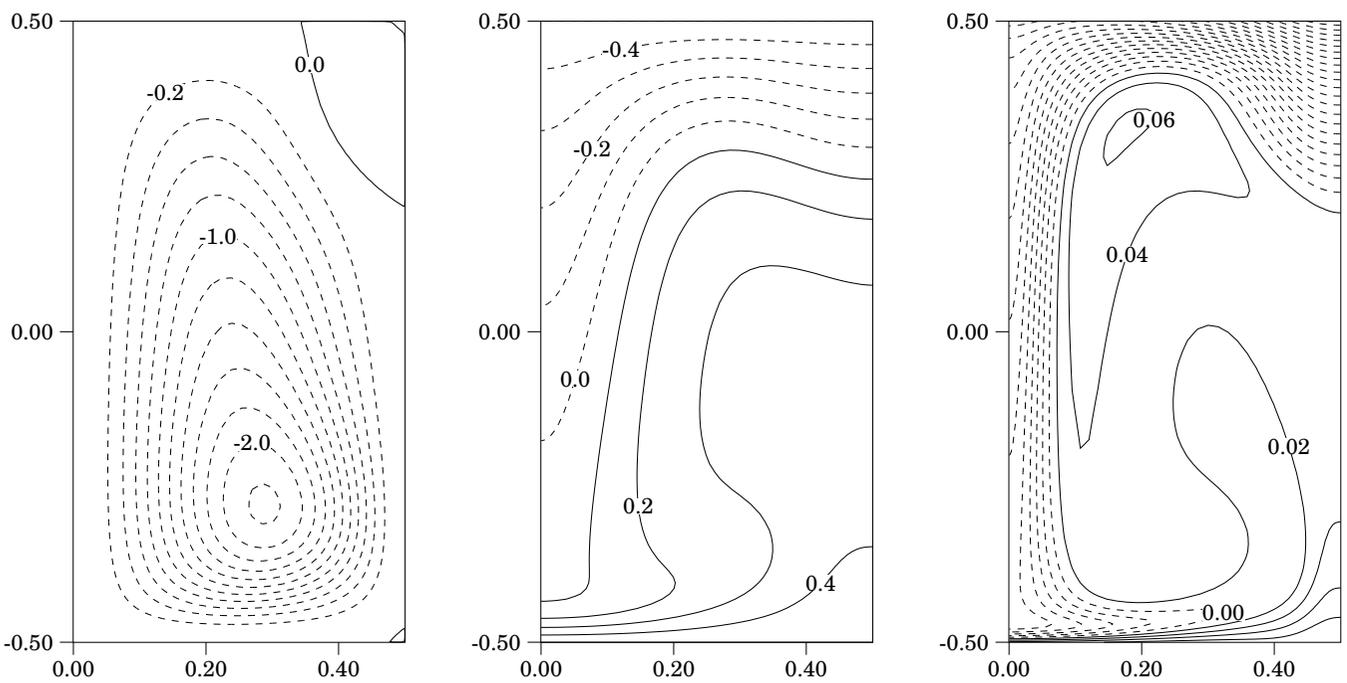


Figure 12: Streamfunction, temperature and mass fraction contours of the  $Ra = 1.075 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{-1}$  and  $\Psi = -0.2$  binary liquid state (NS configuration).

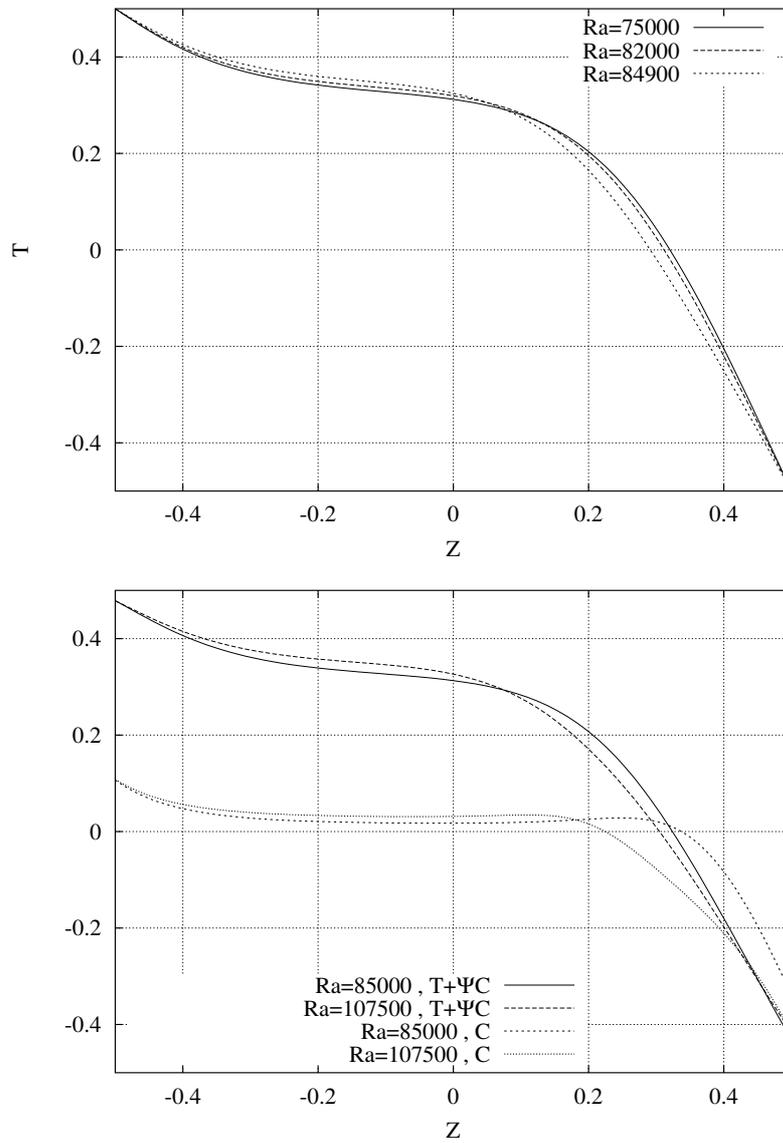


Figure 13: Upper graph: Temperature profile along the cylinder's circumference for the  $Pr = 1$  fluid. Lower graph: Equivalent 'buoyancy' profile and mass fraction contribution for the  $Pr = 1$  Binary liquid (NS configuration).

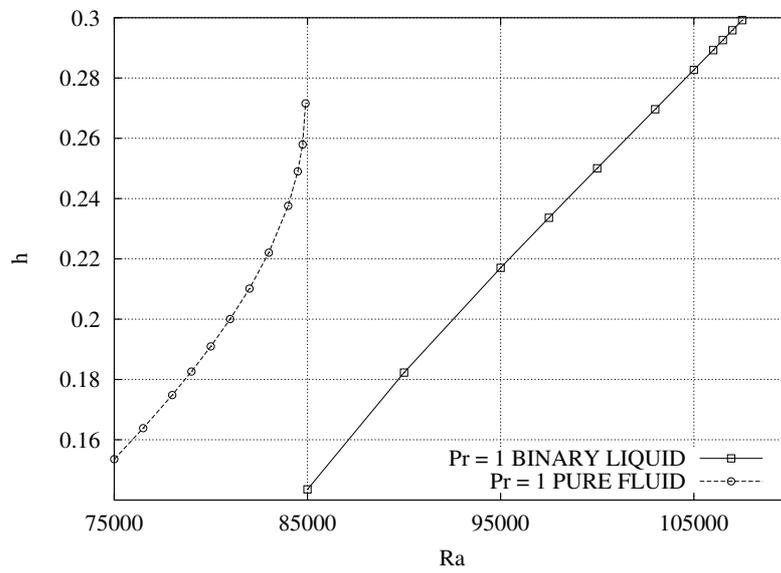


Figure 14: Height of the corner roll,  $Pr = 1$  pure fluid and binary liquid (NS configuration).

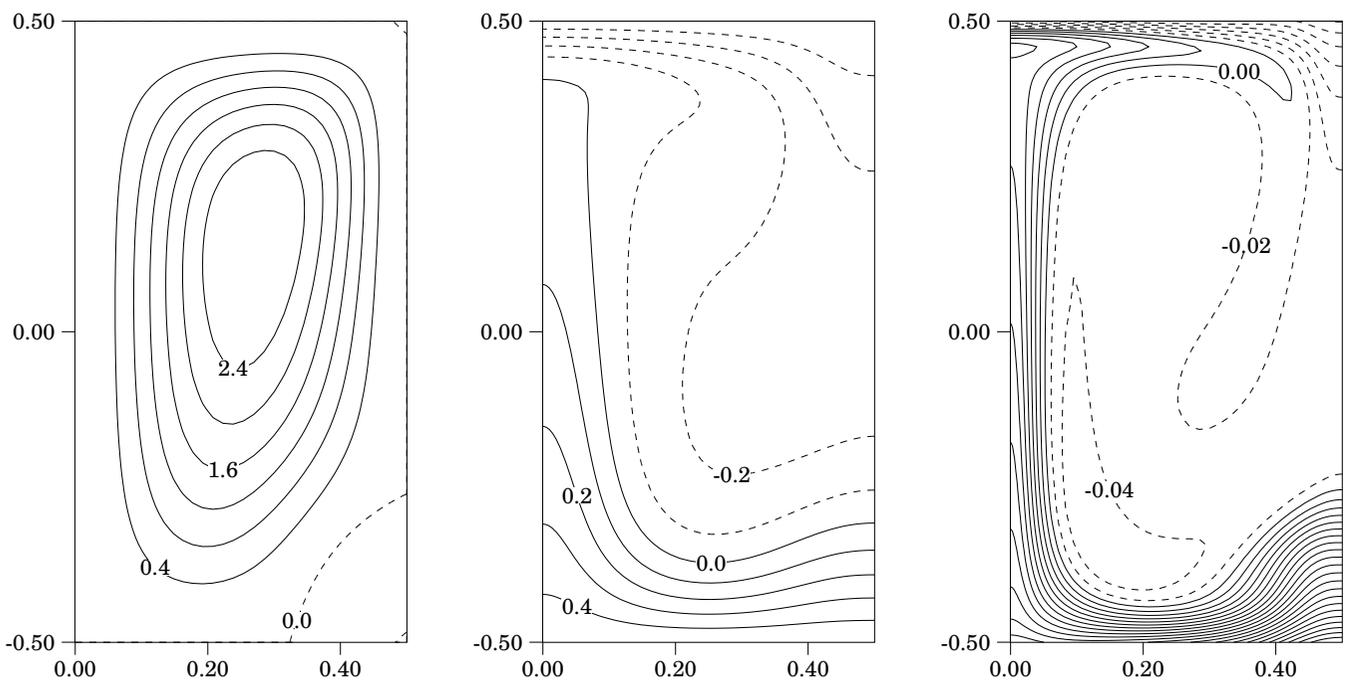


Figure 15: Streamfunction, temperature and mass fraction contours.  $Ra = 1.24 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Le = 10^{-1}$  and  $\Psi = -0.2$  binary liquid (NS configuration).

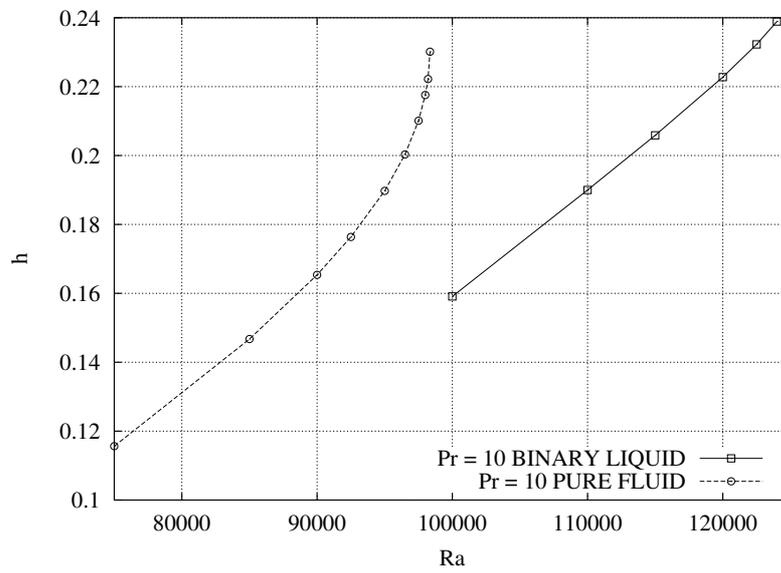


Figure 16: Height of the corner roll,  $Pr = 10$  pure fluid and binary liquid (NS configuration).

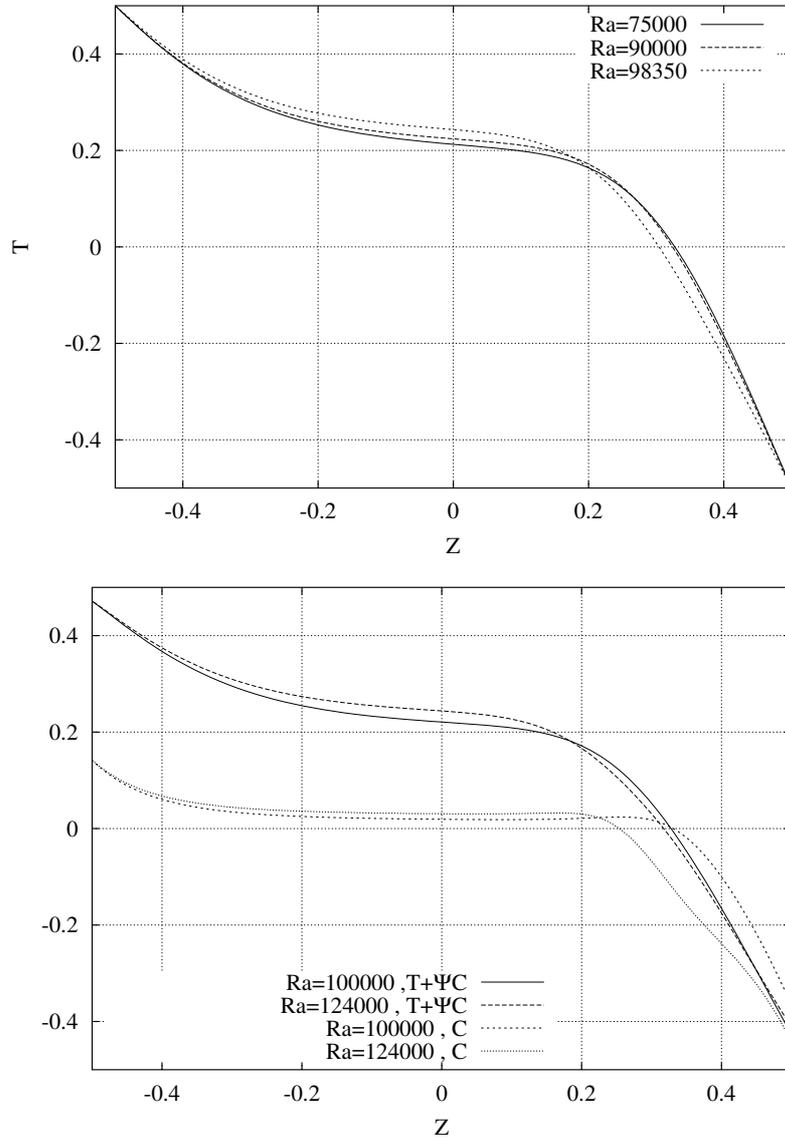


Figure 17: Upper graph: Temperature profile along the cylinder's circumference for the  $Pr = 10$  fluid. Lower graph: Equivalent 'buoyancy' profile and mass fraction contribution for the  $Pr = 10$  binary liquid (NS configuration).

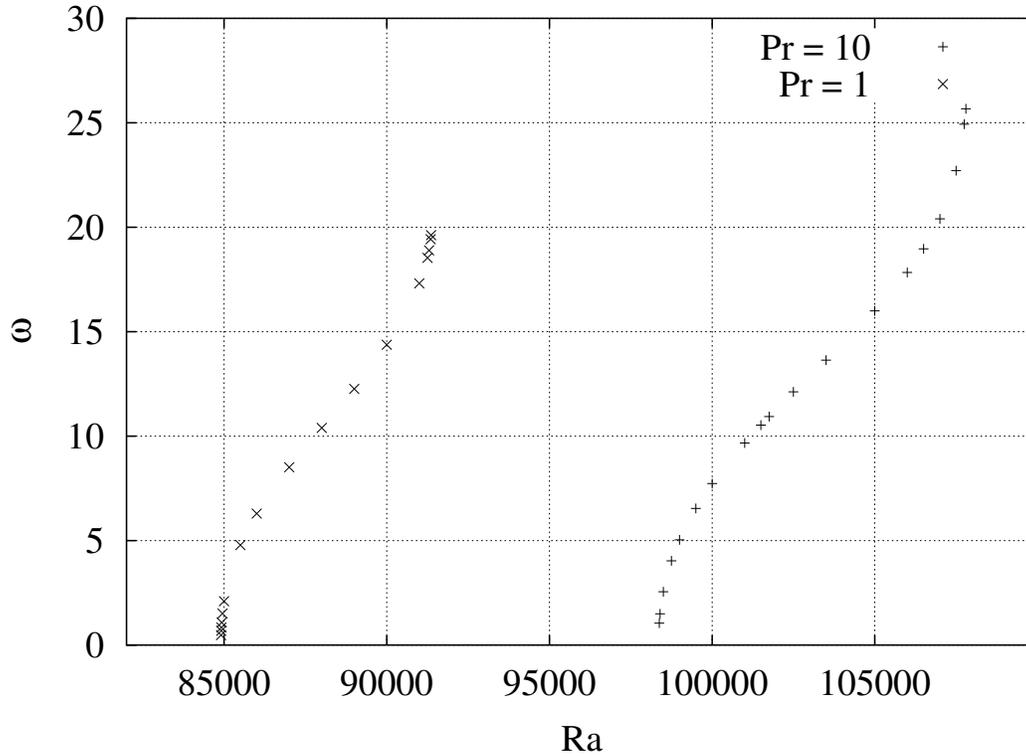


FIG. 7.2 – Pulsation des états oscillants  $osc_1$  de fluides purs de nombres de Prandtl différents.  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , configuration “rigide”.

### 7.3 Caractéristiques générales des régimes oscillants

La section précédente étant principalement relative aux écoulements stationnaires, les régimes instationnaires n’y ont été que légèrement abordés. Nous allons à présent décrire ces derniers, en commençant par rappeler qu’ils ne sont observés qu’en configuration “rigide” et peuvent être de type  $osc_1$  (état qui ne s’observe que dans le cas des fluides purs) ou  $osc_2$  (“communs” aux fluides purs et liquides binaires).

#### 7.3.1 Branches $osc_1$

Les pulsations des écoulements  $osc_1$  des fluides purs à  $Pr = 1$  et  $Pr = 10$  sont présentés dans la figure 7.2. Ces deux cas présentent une croissance monotone similaire de la fréquence en fonction de  $Ra$ . La branche  $Pr = 10$  naît à une valeur plus grande de  $Ra$ , s’étend sur un domaine plus vaste et vers des pulsations plus importantes que la branche  $Pr = 1$ . On remarque incidemment que l’augmentation de la taille du domaine oscillant induit par l’augmentation de la valeur de  $Pr$  est une conséquence inverse de celle observée pour les écoulements  $osc_1$  des fluides binaires à bas  $Ra$  (présentés page 131).

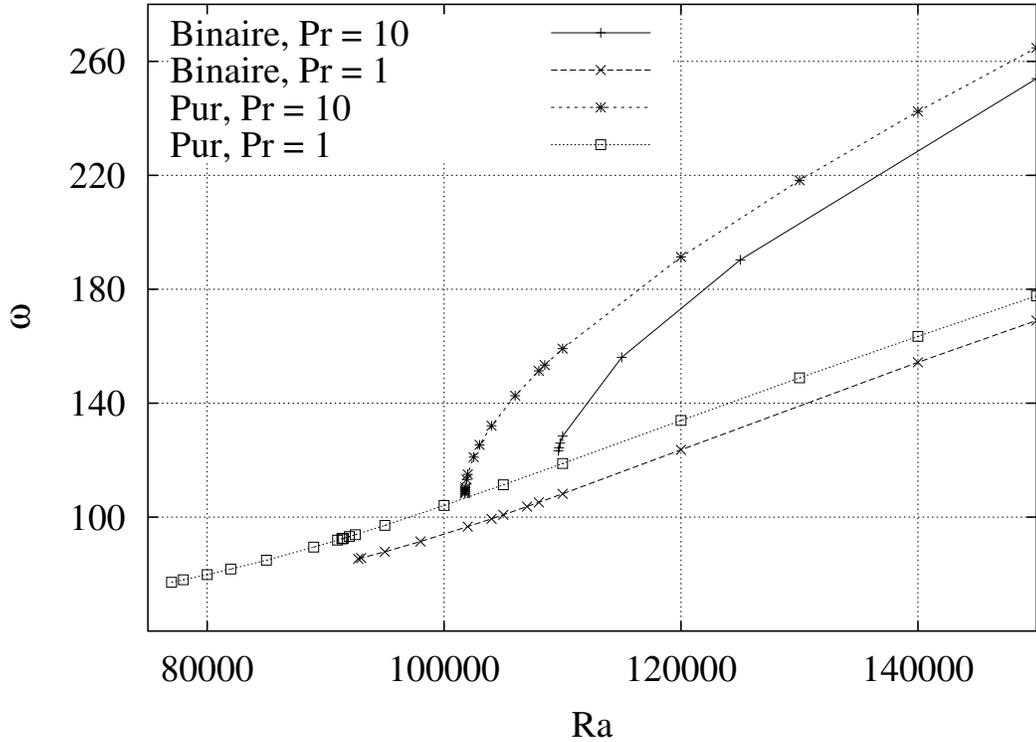


FIG. 7.3 – Pulsations des états oscillants (composés de deux cellules empilées) des fluides purs et liquides binaires ( $Le = 10^{-1}$ ,  $\Psi = -0.2$ ).  $\Gamma = \frac{1}{2}$ , configuration “rigide”.

### 7.3.2 Branches $osc_2$

Etant donné que fluides purs et liquides binaires ont accès à cette branche de solutions, les résultats relatifs aux quatre cas étudiés sont présentés conjointement dans la figure 7.3.

Dans tous les cas, la pulsation des oscillations augmente avec  $Ra$ , bien que suivant des comportements distincts selon qu’il s’agisse de solutions à  $Pr = 10$  ou  $Pr = 1$ . Pour les deux fluides, les branches  $Pr = 10$  naissent à des valeurs plus grandes de  $Ra$ . De plus, à même valeur de  $Pr$ , les oscillations sont de plus haute fréquence pour le fluide pur que pour le liquide binaire. Rappelons pour finir que les branches  $osc_2$  pour  $Pr = 10$  débutent à des bifurcations noeud-cols. Par contre, pour  $Pr = 1$  la branche associée au fluide pur est issue d’une bifurcation de Hopf super-critique (avec  $\omega_{Hopf} = 76.3$ ) de l’état  $sta_2$  tandis que celle du liquide binaire naît via une bifurcation sous-critique (avec  $\omega_{Hopf} = 88.5$ ) de l’état  $sta_2$ .

## 7.4 Synthèse

Le résultat principal de cette étude menée à hauts nombres de Rayleigh en configuration “rigide” et “libre” est certainement d’avoir non seulement montré que les écoulements de fluides purs et liquides binaires peuvent être différents mais surtout d’avoir isolé la cause de ces disparités. Lorsque le système permet l’existence de recirculations, ce qui est le cas en configuration “rigide”,

on observe que la croissance de ces structures est assujettie à l'effet Soret.

Cette influence de la nature (binaire ou non) du fluide a en outre des conséquences importantes sur les propriétés dynamiques des solutions du système. Plus précisément, on trouve que les solutions stationnaires ( $sta_1$ ) du fluide pur sont des noeuds tandis que celles du liquide binaire sont des foyers, bien que les écoulements des deux cas soient fortement similaires. La conséquence directe de cette disparité est que la bifurcation globale entraînant la transition de l'état de convection stationnaire à oscillante observée dans le cas d'un fluide pur ne peut avoir lieu à partir des états stationnaires du liquide binaire. Aucun régime de convection oscillante (du type de celui obtenu pour un fluide pur) ne peut alors se développer lorsque le liquide est binaire.

Les investigations complémentaires menées pour  $Pr = 10$  (les études et résultats mentionnés ci-dessus traitant du cas  $Pr = 1$ ) montrent de plus que ce changement des propriétés des fluides considérés n'altère cependant pas les remarques et conclusions précédentes.

Etant donné que l'effet Soret influe sur la croissance de la recirculation de la même manière qu'il influe sur la stabilité de l'état conductif, on peut penser que des variations du paramètre de séparation  $\psi$  entraîneront les conséquences suivantes :

- La déstabilisation de l'état stationnaire  $sta_1$  aura lieu pour des valeurs de  $Ra$  d'autant plus grandes (petites) que  $\psi$  décroît (croît) vers des valeurs négatives (positives) plus importantes.
- De même pour des valeurs de  $\psi$  positives, la branche des solutions  $sta_1$  devrait se terminer par la même bifurcation globale que celle observée dans le cas d'un fluide pur ( $\psi = 0$ ), menant par conséquence à un état oscillant du type  $osc_1$ .

Des calculs menés pour d'autres valeurs de  $\psi$  devraient permettre de vérifier la validité et la portée de ces supputations.

# Conclusions et perspectives

L'étude présentée dans ce document porte sur l'influence du confinement sur les régimes convectifs axisymétriques d'un liquide binaire confiné dans un cylindre vertical chauffé par le bas. L'investigation des écoulements oscillants et stationnaires qui surviennent dans le système a été réalisée par simulation numérique directe du problème. L'évaluation des contraintes dues au confinement sur ces solutions résulte de la recherche et l'analyse de celles-ci pour plusieurs configurations. Plus précisément, les simulations ont été réalisées pour des cavités de rapport d'aspect (rapport du rayon sur la hauteur du cylindre)  $\Gamma = 2, 1$  et  $1/2$ . Deux types de conditions cinématiques sur la paroi latérale ont de plus été traitées : adhérence ou glissement (ces configurations sont alors respectivement qualifiées de type "rigide" ou "libre") selon que cette frontière représente une paroi solide ou une surface libre.

Dans un premier temps, une étude détaillée des états et transitions entre ceux-ci en configuration  $\Gamma = 2$  "rigide" a été menée. Ces résultats mettent en évidence des comportements distincts de ceux observés en cavités de grande extension. On trouve en particulier que la nature des ondes associées à la propagation des rouleaux de convection des états oscillants est loin d'être triviale. De plus, la transition menant des solutions oscillantes à stationnaires résulte d'une bifurcation sous-critique de Hopf généralisée, fait qui n'est généralement pas observé dans ce type de système.

Suite à ces premiers résultats, l'investigation de l'influence du confinement proprement dit a été menée. Les simulations des configurations "rigide" et "libre" pour les trois rapports d'aspect montrent une quantité surprenante de comportements dynamiques selon le cas étudié.

En configuration "rigide" on observe en particulier que pour  $\Gamma = 1$  ou  $1/2$ , la branche des solutions oscillante s'achève par une bifurcation homocline (donc de type global), profondément distincte de celle, locale, du cas  $\Gamma = 2$ . On trouve en outre que le passage de  $\Gamma = 1$  à  $1/2$  est à l'origine d'une "torsion" de la branche oscillante. Il y a alors en conséquence deux séries de solutions qui s'étendent alors sur des intervalles de fréquences distincts.

En configuration "libre", les états oscillants suivent rigoureusement (pour les trois rapports d'aspect) un scénario complexe de bifurcations, initié par une brisure de symétrie temporelle, suivie d'une cascade de doublements de période menant à des régimes chaotiques, eux-mêmes suivis d'une intermittence de crise puis d'un effondrement de l'attracteur final lors d'une crise de frontière.

Quelques simulations complémentaires ont été réalisées pour des liquides binaires de caractéristiques différentes. On observe que ces variations n'altèrent cependant pas les propriétés des solutions oscillantes et bifurcations associées.

La dernière partie des travaux effectués est relative à l'étude de l'influence de la nature du liquide binaire sur ses régimes convectifs lorsque le système est soumis à un important forçage thermique. La comparaison entre ces écoulements et ceux obtenus pour un fluide pur dans les mêmes

conditions montre que l'affirmation selon laquelle la convection d'un liquide binaire est identique à celle d'un fluide pur n'est pas toujours vérifiée. On observe en particulier qu'en configuration "rigide" ces disparités sont dues à la croissance d'une recirculation de fluide et que l'évolution de cette structure est pilotée par les caractéristiques du fluide considéré. On trouve de plus que les propriétés dynamiques des écoulements stationnaires de fluides purs et binaires dépendent de même de la nature du fluide. Cette différence entre les deux systèmes permet d'expliquer pourquoi l'état oscillant (résultant d'une bifurcation globale de l'état stationnaire) obtenu pour un fluide pur n'a pas d'équivalent dans le cas d'un liquide binaire (où par ailleurs la branche des états stationnaires se termine par une bifurcation, locale, de Hopf sous-critique). A nouveau, des calculs complémentaires montrent qu'un changement des caractéristiques des fluides considérés n'altère pas les observations précédentes.

Ces nombreux résultats illustrent d'une manière éclatante à quel point un fort confinement du système altère les comportements des solutions de celui-ci. Bien que ces travaux aient permis de mettre en évidence et d'élucider un certain nombre de phénomènes particuliers, il est évident qu'ils ne donnent qu'un aperçu du comportement du système dans l'espace des paramètres. Un aspect essentiel que les présentes analyses montrent indubitablement est l'importance de mener, outre l'exploration directe des solutions d'un problème donné, l'analyse des bifurcations de ces dernières.

Mentionnons à ce sujet qu'un bon nombre des bifurcations rencontrées au cours de cette étude résultent d'interaction entre solutions stables et instables, ces dernières n'étant identifiées que de manière indirecte puisque inaccessible à la simulation numérique directe employée. Il serait donc de toute évidence très instructif de développer des outils numériques complémentaires pour les atteindre ces solutions instables (stationnaires et instationnaires) et ainsi obtenir une vue d'ensemble plus complète du système.

Hormis ces perspectives d'explorations complémentaires du problème bidimensionnel traité ici, il est évident qu'il faut à présent poursuivre les investigations vers une modélisation plus représentative des écoulements des systèmes réels en effectuant des simulations tridimensionnelles. Il est en outre envisagé de poursuivre les recherches en direction des problèmes physiques à l'origine du choix des configurations étudiés : la convection dans la partie polaire du noyau de la Terre et la croissance cristalline en zone flottante. Il s'agira alors, dans le premier cas, de prendre en compte les effets de la rotation, voire d'un champ magnétique sur les régimes convectifs. Pour ce qui est de la zone flottante, il faudra prendre en compte les effets de tension de surface s'exerçant le long de la surface libre, thème actuellement intensivement étudié au LIMSI et pour le moment restreint aux cas de fluides purs.

# Bibliographie

- Abernathy J.R. and Rosenberger F.,  
*Soret diffusion and convective stability in a closed vertical cylinder*,  
**Phys. Fluids** 1981, Vol. 24, pp. 377-381
- Barkley D. and Tuckerman L.,  
*Traveling waves in axisymmetric convection : the role of sidewall conductivity*,  
**Physica D** 1989, Vol. 37, pp. 288-294
- Barten W., Lücke M. and Kamps M.,  
*Localized traveling-wave convection in binary fluid mixtures*,  
**Phys. Rev. Lett.** 1991, Vol. 66, Num. 20, pp. 2621-2624
- Barten W., Lücke M., Kamps M. and Schmitz R., (a)  
*Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states*,  
**Phys. Rev. E** 1995, Vol. 51, Num. 6, pp. 5636-5661
- Barten W., Lücke M., Kamps M. and Schmitz R., (b)  
*Convection in binary fluid mixtures. II. Localized traveling waves*,  
**Phys. Rev. E** 1995, Vol. 51, Num. 6, pp. 5662-5680
- Batoul A., Kallouf H. and Labrosse G.,  
*Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire, application à la cavité entraînée carrée*,  
**C. R. Acad. Sci. Paris** 1994, T. 319, Série 11, pp. 1455-1461
- Behringer R. P.,  
*Rayleigh-Bénard convection and turbulence in liquid helium*,  
**Rev. Modern Phys.** 1985, Vol. 57, Num. 3, pp. 657-687
- Bensimon D., Pumir A., and Shraiman B.I.,  
*Nonlinear theory of traveling wave convection in binary mixtures*,  
**J. de Physique (France)** 1989, Vol. 50, pp. 3089-3108
- Bensimon D., Kolodner P., Surko C.M., Williams H. and Croquette V.,  
*Competing and coexisting dynamical states of travelling-wave convection in an annulus*,  
**J. Fluid Mech.** 1990, Vol. 217, pp. 441-467
- Bodenschatz E., Pesch W. and Ahlers G.,  
*Recent developments in Rayleigh-Bénard convection*,  
**Annu. Rev. Fluid Mech.** 2000, Vol. 32, pp. 709-778

- Buell J.C. and Catton I.,  
*The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right cylinder heated from below,*  
**J. Heat Transfer** 1983, Vol 105, pp. 255-260
- Caldwell D. R.,  
*Experimental studies on the onset of thermohaline convection,*  
**J. Fluid Mech.** 1974, Vol. 64, Part 2, pp. 347-367
- Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A. and Zang T.A.,  
*Spectral methods in fluid dynamics*  
**Springer-Verlag** 1988
- Chandrasekhar S.,  
*Hydrodynamic and hydromagnetic stability,*  
**Clarendon Press, Oxford** 1961
- Charlson G.S. and Sani R.L.,  
*Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer,*  
**Int. J. Heat Mass Transfer** 1970, Vol. 13, pp. 1479-1496
- Charlson G.S. and Sani R.L.,  
*On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer,*  
**Int. J. Heat Mass Transfer** 1971, Vol. 14, pp. 2157-2160
- Crespo E. and Velarde M.G.,  
*Two-component Bénard convection in cylinders,*  
**Int. J. Heat Mass Transfer** 1982, Vol. 25, Num. 9, pp. 1451-1456
- Cross M. C.,  
*Traveling and standing waves in binary fluid convection in finite geometries,*  
**Phys. Rev. Lett.** 1986, Vol. 57, Num. 23, pp. 2935-2938
- Cross M. C.,  
*Structure of nonlinear traveling-wave states in finite geometries,*  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 38, Num. 7, pp. 3593-3600
- Cross M. C. and Kim K.,  
*Linear instability and the codimension-2 region in binary fluid convection between rigid impermeable boundaries,*  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 37, Num. 10, pp. 3909-3920
- Deane A. E., Knobloch E. and Toomre J.,  
*Traveling waves and chaos in thermosolutal convection,*  
**Phys. Rev. A** 1987, Vol. 36, Num. 6, pp. 2862-2869
- Deane A. E., Knobloch E. and Toomre J.,  
*Traveling waves in large aspect ratio thermosolutal convection,*  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 37, Num. 5, pp. 1817-1820
- Delouche E.,  
*Convection thermosolutale avec effet Soret en milieu confiné,*  
**Thèse de l'Université Paris Sud** 1996, Orsay, France

- Fineberg J., Moses L. and Steinberg V., (a)  
*Nonlinear pattern and wave-number selection in convecting binary mixtures,*  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 38, Num. 9, pp. 4939-4942
- Fineberg J., Moses L. and Steinberg V., (b)  
*Spatially and temporally modulated travelling-waves patterns in convecting binary mixtures ,*  
**Phys. Rev. Lett.** 1988, Vol. 61, Num. 7, pp. 838-841
- Glendinning P.  
*Stability, instability and chaos : an introduction to the theory of nonlinear differential equations,*  
**Cambridge university press** 1996
- Gutkowicz-Krusin D., Collins M.A. and Ross J., (a)  
*Rayleigh-Bénard instability in nonreactive binary fluids. I. Theory,*  
**Phys. Fluids** 1979, Vol. 22, Num. 8, pp. 1443-1450
- Gutkowicz-Krusin D., Collins M.A. and Ross J., (b)  
*Rayleigh-Bénard instability in nonreactive binary fluids. II. Results*  
**Phys. Fluids** 1979, Vol. 22, Num. 8, pp. 1451-1460
- Hardin G.R., Sani R.L., Henry D. and Roux B.,  
*Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with Soret effect. Part I : general theory and stationary stability results,*  
**Int. J. for Numerical Methods in Fluids** 1990, Vol. 10, pp. 79-117
- Hardin G.R. and Sani R.L.,  
*Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with Soret effect. Part II : weakly non-linear solutions,*  
**Int. J. for Numerical Methods in Fluids** 1993, Vol. 17, pp. 755-786
- Hof B., Lucas G.J and Mullin T.,  
*Flow state multiplicity in convection,*  
**Phys. Fluids** 1999, Vol. 11, Num. 10, pp. 2815-2817
- Hollinger S. and Lücke M.,  
*Influence of the Soret effect on convection of binary fluids,*  
**Phys. Rev. E** 1998, Vol. 57, Num. 4, pp. 4238-4249
- Hollinger S. , Lücke M. and Müller H.W.,  
*Model for convection in binary liquids,*  
**Phys. Rev. E** 1998, Vol. 57, Num. 4, pp. 4250-4264
- Hurle D.T.J. and Jakeman E.,  
*Soret-driven thermosolutal convection,*  
**J. Fluid Mech.** 1971, Vol. 47, Part 4, pp. 667-687
- Jan D., Casa-Vazquez J. and Lebon G.,  
*Extended Irreversible Thermodynamics (2<sup>nd</sup> edition),*  
**Springer** 1996

- Kamotani Y., Weng F.-B., Ostrach S. and Platt J.,  
*Oscillatory natural convection of a liquid metal in circular cylinders*,  
**J. Heat Transfer** 1994, Vol. 116, pp. 627-632
- Knobloch E., Moore D. R., Toomre J. and Weiss N. O.,  
*Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection*,  
**J. Fluid Mech.** 1986, Vol. 166, pp. 409-448
- Knobloch E.,  
*Oscillatory convection in binary mixtures*,  
**Phys. Rev. A** 1986, Vol. 34, Num. 2, pp. 1538-1549
- Knobloch E. and Moore D.R.,  
*Linear stability of experimental Soret convection*,  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 37, Num. 3, pp. 860-870
- Knobloch E. and Moore D.R.,  
*Minimal model of binary fluid convection*,  
**Phys. Rev. A** 1990, Vol. 42, Num. 8, pp. 4693-4709
- Kolodner P., Williams H. and Moe C.,  
*Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions*,  
**J. Chem. Phys.** 1988, Vol. 88, Num. 10, pp. 6512-6524
- Kolodner P.,  
*Stable, unstable, and defect confined states of traveling-wave convection*,  
**Phys. Rev. E** 1994, Vol. 40, Num. 4, pp. 2731-2755
- Labrosse G., Tric E., Kallouf H. and Betrouni M.,  
*A direct (pseudo-spectral) solver of the 2D/3D Stokes problem : transition to unsteadiness of natural-convection flow in a differentially heated cubical cavity*,  
**Num. Heat Transfer Part B** 1997, Vol. 31, pp. 261-276
- La Porta A., Eaton K.D. and Surko C.M.,  
*Transition between curved and angular textures in binary fluid convection*,  
**Phys. Rev. E** 1996, Vol. 53, Num. 1, pp. 570-576
- Landau and Lifchitz,  
*Physique théorique, Volume 6, Mécanique des fluides (2<sup>ème</sup> édition)*,  
**Editions Mir**, Moscou
- Landsberg A. S. and Knobloch E., (a)  
*Oscillatory bifurcation with broken translation symmetry*,  
**Phys. Rev. E** 1996, Vol. 53, Num. 4, pp. 3579-3600
- Landsberg A. S. and Knobloch E., (b)  
*Oscillatory doubly diffusive convection in a finite container*,  
**Phys. Rev. E** 1996, Vol. 53, Num. 4, pp. 3601-3609

- Legros J.C., Goemaere P. and Platten J.K.,  
*Soret coefficient and the two-component Bénard convection in benzene-methanol system,*  
**Phys. Rev. A** 1985, Vol. 32, Num. 3, pp. 1903-1905
- Lerman K., Bodenschatz E., Cannell D.S. and Ahlers G.,  
*Transient localized states in 2D binary liquid convection*  
**Phys. Rev. Lett.** 1993, Vol. 70, Num. 23, pp. 3572-3575
- Lerman K., Ahlers G. and Cannell D.S.,  
*Different convection dynamics in mixtures with the same separation ratio,*  
**Phys. Rev. E** 1996, Vol. 53, Num. 3, pp. R2041-R2044
- Lhost O. and Platten J.K.,  
*Transitions between steady states, traveling waves, and modulated waves in the system water-isopropanol heated from below,*  
**Phys. Rev. A** 1988, Vol. 38, Num. 6, pp. 3147-3150
- Lhost O. and Platten J.K.,  
*Large-scale convection induced by the Soret effect,*  
**Phys. Rev. A** 1989, Vol.40, Num. 11, pp. 6415-6420
- Lhost O., Linz S.J. and Müller H.W.,  
*Onset of convection in binary liquid mixtures : improved Galerkin approximation,*  
**J. Phys. II** 1991, Vol. 1, pp. 279-287
- Lhost O. and Platten J.K.,  
*Free convection in binary mixtures : sensitivity to lateral boundary conditions,*  
**Phys. Rev. A** 1991, Vol. 44, Num. 6, pp. 3765-3768
- Linz S. J. and Lücke M.,  
*Convection in binary mixtures : A Galerkin model with impermeable boundary conditions,*  
**Phys. Rev. A** 1987, Vol. 35, Num. 9, pp. 3997-4000
- Liu M. and De Bruyn J. R.,  
*Traveling wave convection in a narrow rectangular cell,*  
**Can. J. Phys.** 1992, Vol. 70, pp. 689-695
- Lücke M., Barten W., Büchel P., Fütterer C., Hollinger C., and Jung CH.,  
*Pattern formation in binary fluid convection and in systems with throughflow,*  
 “Evolution of structures in dissipative continuous systems”,  
**Lecture Notes in Physics, Springer** 1998, Edt. Busse F. H. & Müller S. C., pp. 127-197
- Manneville P.,  
*Dissipative structures and weak turbulence,*  
**Academic**, San Diego 1990
- Manneville P. and Piquemal J.M.,  
*Zigzag instability and axisymmetric rolls in Rayleigh-Bénard convection : the effect of curvature,*  
**Phys. Rev. A** 1983, Vol. 28, Num. 3, pp.1774-1790

- Mercader I., Net M. and Knobloch E.,  
*Binary fluid convection in a cylinder*,  
**Phys. Rev. E** 1995, Vol. 51, Num. 1, pp. 339-350
- Moore D. R., Weiss N. O. and Wilkins J. M.,  
*Asymmetric oscillations in thermosolutal convection*,  
**J. Fluid Mech.** 1991, Vol. 233, pp. 561-585
- Moses E. and Steinberg V.,  
*Competing patterns in a convective binary mixture*,  
**Phys. Rev. Lett.** 1986, Vol. 57, Num. 16, pp. 2018-2021
- Moses E. and Steinberg V.,  
*Mass transport in propagating patterns of convection*,  
**Phys. Rev. Lett.** 1988, Vol. 60, Num. 20, pp.2030-2033
- Neumann G.,  
*Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below*,  
**J. Fluid Mech.** 1990, Vol. 214, pp. 559-578
- Olson J. M. and Rosenberger F.,  
*Convective instabilities in a closed vertical cylinder heated from below. Part 1. Monocomponent gases*,  
**J. Fluid Mech.** 1979, Vol. 92, Part 4, pp. 609-629
- Olson J. M. and Rosenberger F.,  
*Convective instabilities in a closed vertical cylinder heated from below. Part 2. Binary gas mixtures*,  
**J. Fluid Mech.** 1979, Vol. 92, Part 4, pp. 631-642
- Ott E.,  
*Chaos in dynamical systems*,  
**Cambridge University Press** 1993
- Predtechensky A. A., McCormick W. D., Swift J. B., Rossberg A. G. and Swinney H. L.,  
*Traveling wave instability in sustained double-diffusive convection*,  
**Phys. Fluids** 1994, Vol. 6, Num. 12, pp. 3923-3935
- Platten J.K. and Legros J.C.,  
*Convection in liquids*,  
**Springer** 1984
- Rehberg I. and Ahlers G.,  
*Experimental observation of a codimension-two bifurcation in a binary fluid mixture*,  
**Phys. Rev. Lett.** 1985, Vol. 55, Num. 5, pp. 500-503
- Riecke H.,  
*Attractive interaction between pulses in a model for convection in binary mixtures*,  
**Phys. Rev. E** 1995, Vol. 52, Num. 5, pp. 5685-5687

- Riecke H. and Rappel W.-J.,  
*Coexisting pulses in a model for binary-mixture convection,*  
**Phys. Rev. Lett.** 1995, Vol. 75, Num. 22, pp. 4035-4038
- Rosenblat S.,  
*thermal convection in a vertical cylinder,*  
**J. Fluid Mech.** 1982, Vol. 122, pp. 395-410
- Schöpf W. and Zimmermann W.,  
*Convection in binary fluids : Amplitude equations, codimension-2 bifurcation and thermal fluctuations,*  
**Phys. Rev. E** 1993, Vol. 47, Num. 3, pp. 1739-1764
- Stein N.D.,  
*Exact sine series solution for oscillatory convection in a binary fluid,*  
**Phys. Rev. A** 1991, Vol.43, Num. 2, pp. 768-773
- Steinberg V., Moses E. and Fineberg J.,  
*Spatio-temporal complexity at the onset of convection in a binary fluid,*  
**Nuclear Phys. B** 1987, Proc. Suppl. 2, pp. 109-124
- Swift J. W. and Wiesenfeld K.,  
*Suppression of period doubling in symmetric systems,*  
**Phys. Rev. Lett.** 1984, Vol. 52, Num. 9, pp. 705-708
- Thurlow M.S., Brooks B.J., Lucas P.G., Ardron M.R., Bhattacharjee J.K. and Woodcraft A.L.,  
*Convective instability in rotating liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures,*  
**J. Fluid Mech.** 1996, Vol. 313, pp. 381-407
- Touiri H., Platten J.K. and Chavepeyer G.,  
*Effect of the separation ratio on the transition between travelling waves and steady convection in the two-component Rayleigh-Bénard problem,*  
**Eur. J. Mech./B Fluids** 1996, Vol. 15, Num. 2, pp. 241-257
- Touihri R., Ben Hadid H. and Henry D.,  
*On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. I. Pure thermal case,*  
**Phys. Fluids** 1999, Vol. 11, Num. 8, pp. 2078-2088
- Tric E. and Labrosse G.,  
*A direct (pseudo-spectral) solver of the 2D/3D stokes problem : accurate numerical simulation of laminar natural-convection flow in a differentially heated cavity,*  
**Proceedings of the international conference on heat and mass transfer CHMT99**  
 1999, Eastern Mediterranean University Printing House, Cyprus, pp. 143-149
- Tric E., Labrosse G. and Betrouni M.,  
*A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions,*  
**Int. J. Heat Mass Transfer** 2000, Vol. 43, pp. 4043-4056

- Tuckerman L.S. and Barkley D.,  
*Global bifurcation to traveling waves in axisymmetric convection*,  
**Phys. Rev. Lett.** 1988, Vol. 61, Num. 3, pp. 408-411
- Velarde M.G., Crespo E. and Garci-Ybarra P.L.,  
*Corrigenda et addenda to two-component Bénard convection in cylinders*,  
**Int. J. Heat Mass Transfer** 1985, Vol. 28, Num. 1, pp. 311-313
- Verzicco R. and Camussi R.,  
*Transitional regimes of low-Prandtl thermal convection in a cylindrical cell*,  
**Phys. Fluids** 1997, Vol. 9, Num. 5, pp. 1287-1295
- Wanschura M., Kuhlmann H. C. and Rath H.J.,  
*Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below*,  
**J. Fluid Mech.** 1996, Vol.326, pp. 399-415
- Wagner C., Friedrich R. and Narayanan R.,  
*Comments on the numerical investigation of Rayleigh and Marangoni convection in a vertical circular cylinder*,  
**Phys. Fluids** 1994, Vol. 6, Num. 4, pp. 1425-1433
- Winkler B. L. and P. Kolodner,  
*Measurements of the concentration field in nonlinear travelling-wave convection*,  
**J. Fluid Mech.** 1992, Vol. 240, pp. 31-58
- Yahata H.,  
*Travelling convection rolls in a binary fluid mixture*,  
**Prog. Theor. Phys.** 1991, Vol. 85, Num. 5, pp. 933-937
- Zelinska B.J.A. and Brand H.R.,  
*Exact solution of the linear-stability problem for the onset of convection in binary fluid mixtures*,  
**Phys. Rev. A** 1987, Vol. 35, Num. 10, pp. 4349-4353